

応用数値解析特論 第 10 回

かつらだ まさし
桂田 祐史

2026 年 6 月 23 日

目次

- ① 今後の予定
- ② 流体力学の方程式
 - はじめに
 - 流体の運動の表現 何を求めれば良いか
 - 流体力学の方程式 (1) 連続の方程式
 - 物質微分
 - 応力
 - 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体
 - 流体力学の方程式 (2) 運動方程式
 - 流体の境界条件
 - おまけ: 適切な問題のための条件
 - おまけ: Navier-Stokes 方程式の無次元化と Reynolds 数
 - おまけ: 重力下の静水圧
 - おまけ: 粘性率、動粘性率の具体値
 - 渦度 駆け足の説明
 - ポテンシャル流
 - ポテンシャル, 渦無し
- ③ 参考文献

- 次回は
 - レポート課題 A(共通) に取り組んでもらう。
 - レポート課題 B は、各自が選んだ問題について有限要素法で取り組む、というもの。各自問題を定める (現象・数理モデル、弱形式の説明, 数値実験結果とその分析をする)。どういう問題を選ぶか、質問・相談を受け付ける。Hecht [1], 大塚・高石 [2] などに目を通しておくこと。
- 今日は、流体力学の方程式の説明。さ来週以降、定常 Stokes 方程式 (最小化変分原理でない問題, 非線型なので Newton 法で解く)、非定常 Navier-Stokes 方程式について紹介するための準備。

時間に余裕があれば、前回話した全周問題のサンプル・プログラムの紹介をする。

5 流体力学の方程式

5.1 はじめに

流体 (fluid) とは、液体, 気体のように定まった形を持たず、「流れる」ものを理想化したものである。

(Cf. 質点, 質点系, 剛体, 弾性体, …)

5 流体力学の方程式

5.1 はじめに

流体 (fluid) とは、液体, 気体のように定まった形を持たず、「流れる」ものを理想化したものである。

(Cf. 質点, 質点系, 剛体, 弾性体, …)

5 流体力学の方程式

5.1 はじめに

流体 (fluid) とは、液体, 気体のように定まった形を持たず、「流れる」ものを理想化したものである。

(Cf. 質点, 質点系, 剛体, 弾性体, ...)

- 流体のかかわる現象は非常に多く、応用上重要である。

5 流体力学の方程式

5.1 はじめに

流体 (fluid) とは、液体, 気体のように定まった形を持たず、「流れる」ものを理想化したものである。

(Cf. 質点, 質点系, 剛体, 弾性体, ...)

- 流体のかかわる現象は非常に多く、応用上重要である。
- 流体は、圧縮性と粘性の有無で分類される。

5 流体力学の方程式

5.1 はじめに

流体 (fluid) とは、液体, 気体のように定まった形を持たず、「流れる」ものを理想化したものである。

(Cf. 質点, 質点系, 剛体, 弾性体, ...)

- 流体のかかわる現象は非常に多く、応用上重要である。
- 流体は、圧縮性と粘性の有無で分類される。
- 流体の運動の決定については、数学的には解の存在・一意性すら未解決問題である。(ほとんどが非線形問題になり取り扱いが難しい。)

流体力学の定番本として、今井 [3], 巽 [4] をあげておく。

5.2 流体の運動の表現 何を求めれば良いか

流体の状態は、ふつう次のものを求めることで定まる。ただし $\mathbf{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ は位置, t は時刻を表す。

- 速度 (velocity) $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$
(\mathbf{v} の代わりに \mathbf{u} という字を使うことも多い。)
- 圧力 (pressure) $p(\mathbf{x}, t)$
- 密度 (density) $\rho(\mathbf{x}, t)$
- 温度 (temperature) 今回は考えない。

問 水と空気のおおよその密度は？ (この PDF の最後に答えがある。)

解答 水は 1 ml で 1 g とすれば、 $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ である。

空気については、高校の化学の知識で、1 mol は 22.4 l であること、80% が窒素 (分子量 28)、20% が酸素 (分子量 32) であることを用いると、 $\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$ となる。

5.3 流体力学の方程式 (1) 連続の方程式

質量が保存されることから、一般に次式が成立する。これを**連続の方程式** (continuity equation) と呼ぶ。

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

5.3 流体力学の方程式 (1) 連続の方程式

質量が保存されることから、一般に次式が成立する。これを**連続の方程式** (continuity equation) と呼ぶ。

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

証明 (あらすじ) 流体内の任意の領域 V にしめる流体の質量の時間変化率を考えると、質量保存則から

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dx = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

ただし \mathbf{n} は ∂V の点における外向き単位法線ベクトルで、 $d\sigma$ は面積要素、 ∂V は V の境界である。

(2) の右辺の意味や、次の Gauss の発散定理については、例えば桂田 [5], [6] を見よ。

5.3 流体力学の方程式 (1) 連続の方程式

質量が保存されることから、一般に次式が成立する。これを**連続の方程式** (continuity equation) と呼ぶ。

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

証明 (あらすじ) 流体内の任意の領域 V にしめる流体の質量の時間変化率を考えると、質量保存則から

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho \, d\mathbf{x} = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

ただし \mathbf{n} は ∂V の点における外向き単位法線ベクトルで、 $d\sigma$ は面積要素、 ∂V は V の境界である。

(2) の右辺の意味や、次の Gauss の発散定理については、例えば桂田 [5], [6] を見よ。

左辺に積分記号下の微分 (微分と積分の順序交換)、右辺に Gauss の発散定理を使うと

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\mathbf{x} = - \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}.$$

5.3 流体力学の方程式 (1) 連続の方程式

質量が保存されることから、一般に次式が成立する。これを**連続の方程式** (continuity equation) と呼ぶ。

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

証明 (あらすじ) 流体内の任意の領域 V にしめる流体の質量の時間変化率を考えると、質量保存則から

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho \, d\mathbf{x} = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

ただし \mathbf{n} は ∂V の点における外向き単位法線ベクトルで、 $d\sigma$ は面積要素、 ∂V は V の境界である。

(2) の右辺の意味や、次の Gauss の発散定理については、例えば桂田 [5], [6] を見よ。

左辺に積分記号下の微分 (微分と積分の順序交換)、右辺に Gauss の発散定理を使うと

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\mathbf{x} = - \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}.$$

V は任意であるから

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad \square$$

5.4 物質微分 (1) 定義

積の微分法から $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \operatorname{grad} \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}$ が成り立つので、連続の方程式は次のように書ける。

$$(3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

5.4 物質微分 (1) 定義

積の微分法から $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \operatorname{grad} \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}$ が成り立つので、連続の方程式は次のように書ける。

$$(3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

物質微分 (material derivative, Lagrange derivative) と呼ばれる作用素 $\frac{D}{Dt}$ を次式で定義する:

$$(4) \quad \frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

これを使うと (3) は次のように表せる。

$$(5) \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

5.4 物質微分 (1) 定義 ベクトル値関数の場合

ベクトル値関数 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}, t) \\ f_2(\mathbf{x}, t) \\ f_3(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}$ に対しても

$$(6) \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{f} := \begin{pmatrix} (\mathbf{v} \cdot \nabla) f_1 \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) f_2 \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) f_3 \end{pmatrix}, \quad \frac{D\mathbf{f}}{Dt} := \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{Df_1}{Dt} \\ \frac{Df_2}{Dt} \\ \frac{Df_3}{Dt} \end{pmatrix}$$

と定義する。

(これを定義しておかないと、加速度の議論が出来ない。)

5.4 物質微分 (2) 意味

流体の流れに沿って運動するある粒子 (観測者) の位置を $\mathbf{x}(t)$ とする。
すなわち

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)$$

が成り立つ。

5.4 物質微分 (2) 意味

流体の流れに沿って運動するある粒子 (観測者) の位置を $\mathbf{x}(t)$ とする。
すなわち

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)$$

が成り立つ。このとき、任意の関数 $f(\mathbf{x}, t)$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(\mathbf{x}(t), t) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t), t)x_j'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t), t)v_j(\mathbf{x}(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) = \frac{Df}{Dt}(\mathbf{x}(t), t) \end{aligned}$$

が成り立つ。

5.4 物質微分 (2) 意味

流体の流れに沿って運動するある粒子 (観測者) の位置を $\mathbf{x}(t)$ とする。
すなわち

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)$$

が成り立つ。このとき、任意の関数 $f(\mathbf{x}, t)$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(\mathbf{x}(t), t) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t), t)x_j'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t), t)v_j(\mathbf{x}(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) = \frac{Df}{Dt}(\mathbf{x}(t), t) \end{aligned}$$

が成り立つ。

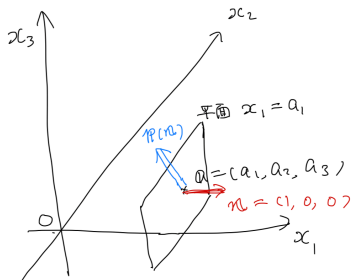
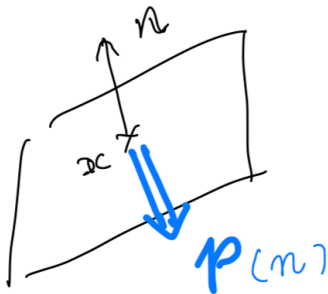
注意 流体粒子の速度は、位置 \mathbf{x} と時刻 t が分かれば $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ で与えられるが、その加速度は $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ でなく、 $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ である。

5.5 応力 (1) Cauchy の応力原理, 応力の定義

流体の運動を考えるため、Cauchy は次の仮定をおいた。

流体が接触することで及ぼす力は面積に比例する。面積あたりの力は、位置 x , 時刻 t , 面の向き (普通は外向き単位法線ベクトル n で指定する) で定まる (**Cauchy の応力原理**)。

この面積あたりの力を**応力** (stress) と呼ぶ。



5.5 応力 (2) 応力テンソル

しばらく、 $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, $t = \tau$ と固定し、応力 \mathbf{p} を \mathbf{n} の関数と考える: $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{n})$.

5.5 応力 (2) 応力テンソル

しばらく、 $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, $t = \tau$ と固定し、応力 \mathbf{p} を \mathbf{n} の関数と考える: $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{n})$.

点 \mathbf{a} を通る平面 $x_i = a_i$ を通して、正の側が負の側におよびす力を $\begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix}$ とおく。これは $\mathbf{p}(\mathbf{e}_i)$ である。

$P := (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$ を応力テンソル (stress tensor) と呼ぶ。

5.5 応力 (2) 応力テンソル

しばらく、 $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, $t = \tau$ と固定し、応力 \mathbf{p} を \mathbf{n} の関数と考える: $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{n})$.

点 \mathbf{a} を通る平面 $x_i = a_i$ を通して、正の側が負の側におよびす力を $\begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix}$ とおく。これは $\mathbf{p}(\mathbf{e}_i)$ である。

$P := (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$ を応力テンソル (stress tensor) と呼ぶ。

次のことが成り立つ (証明は省略)。

- P は対称である: $P^T = P$ つまり $p_{ij} = p_{ji}$.
- $\mathbf{p}(\mathbf{n}) = P\mathbf{n}$. ($\mathbf{p}(\mathbf{n}) = P^T\mathbf{n}$ と書く本もある。)

次式は覚えておくこと。

$$(7) \quad \mathbf{p}(\mathbf{n}) = P\mathbf{n}.$$

5.5 応力 (3) 応力テンソルの具体形

適当な仮定をおくと、応力テンソルの具体形が定まる。

5.5 応力 (3) 応力テンソルの具体形

適当な仮定をおくと、応力テンソルの具体形が定まる。

Stokes (1819–1903) は、流体についての仮定を整理して **Stokes の流体公理** にまとめた (一様、等方、 $E = 0$ のとき $P = -pI$ 等々)。それから

$$P = \alpha I + \beta E + \gamma E^2$$

が導かれる。ここで I は単位テンソル, E は

$$(8) \quad E = (e_{ij}), \quad e_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

で定められ、**歪み (速度) テンソル** (strain rate tensor) あるいは**変形速度テンソル**と呼ばれる。

5.5 応力 (3) 応力テンソルの具体形

適当な仮定をおくと、応力テンソルの具体形が定まる。

Stokes (1819–1903) は、流体についての仮定を整理して **Stokes の流体公理** にまとめた (一様、等方、 $E = 0$ のとき $P = -pI$ 等々)。それから

$$P = \alpha I + \beta E + \gamma E^2$$

が導かれる。ここで I は単位テンソル、 E は

$$(8) \quad E = (e_{ij}), \quad e_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

で定められ、**歪み (速度) テンソル** (strain rate tensor) あるいは**変形速度テンソル**と呼ばれる。

さらに **Newton 流体の仮定** (P は E の 1 次式) をおくと、

$$(9) \quad P = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) I + 2\mu E$$

を得る (導出は岡本・中村 [7] に載っている)。ここで λ, μ は非負定数、 $p = p(x, t)$ はスカラー関数である。

5.6 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (1)

以下では、Newton 流体の仮定を満たす流体を考える。

5.6 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (1)

以下では、Newton 流体の仮定を満たす流体を考える。

μ は粘性率 (粘性係数, 粘度, viscosity) と呼ばれる非負定数である。

5.6 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (1)

以下では、Newton 流体の仮定を満たす流体を考える。

μ は粘性率 (粘性係数, 粘度, viscosity) と呼ばれる非負定数である。

- $\mu = 0$ である流体を完全流体 (perfect fluid), あるいは非粘性流体 (inviscid fluid) と呼ぶ。

5.6 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (1)

以下では、Newton 流体の仮定を満たす流体を考える。

μ は**粘性率 (粘性係数, 粘度, viscosity)** と呼ばれる非負定数である。

- $\mu = 0$ である流体を**完全流体 (perfect fluid)**, あるいは**非粘性流体 (inviscid fluid)** と呼ぶ。
- $\mu > 0$ である流体を**粘性流体 (viscous fluid)** と呼ぶ。

5.6 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (1)

以下では、Newton 流体の仮定を満たす流体を考える。

μ は**粘性率 (粘性係数, 粘度, viscosity)** と呼ばれる非負定数である。

- $\mu = 0$ である流体を**完全流体 (perfect fluid)**, あるいは**非粘性流体 (inviscid fluid)** と呼ぶ。
- $\mu > 0$ である流体を**粘性流体 (viscous fluid)** と呼ぶ。

一方、 $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ を満たす流体を**非圧縮流体** と呼ぶ。一般に連続の方程式 $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ が成り立つので、この条件は次の方程式と同値である。

$$(10) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (\text{非圧縮条件の方程式})$$

(\because 連続の方程式のうち $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ という形のものを見れば分かる。)

5.6 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (1)

以下では、Newton 流体の仮定を満たす流体を考える。

μ は**粘性率 (粘性係数, 粘度, viscosity)** と呼ばれる非負定数である。

- $\mu = 0$ である流体を**完全流体 (perfect fluid)**, あるいは**非粘性流体 (inviscid fluid)** と呼ぶ。
- $\mu > 0$ である流体を**粘性流体 (viscous fluid)** と呼ぶ。

一方、 $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ を満たす流体を**非圧縮流体**と呼ぶ。一般に連続の方程式 $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ が成り立つので、この条件は次の方程式と同値である。

$$(10) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (\text{非圧縮条件の方程式})$$

(\because 連続の方程式のうち $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ という形のものを見れば分かる。)

非圧縮条件を満たす Newton 流体の応力テンソルは、次式を満たす。

$$(11) \quad P = -pl + 2\mu E.$$

5.6 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (2) 有名な(?) 場合

非圧縮流体が、静止している場合 ($\mathbf{v} = 0$) や、粘性がない場合 ($\mu = 0$) においては ($\mu E = 0$ であるので)

$$P = -pI = - \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} .$$

5.6 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (2) 有名な(?) 場合

非圧縮流体が、静止している場合 ($\mathbf{v} = 0$) や、粘性がない場合 ($\mu = 0$) においては ($\mu E = 0$ であるので)

$$P = -pI = - \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\mathbf{p}(\mathbf{n}) = P\mathbf{n} = -p\mathbf{n}.$$

5.6 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (2) 有名な(?) 場合

非圧縮流体が、静止している場合 ($\mathbf{v} = 0$) や、粘性がない場合 ($\mu = 0$) においては ($\mu E = 0$ であるので)

$$P = -pI = - \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\mathbf{p}(\mathbf{n}) = P\mathbf{n} = -p\mathbf{n}.$$

応力は面に垂直 ($\mathbf{p} \parallel \mathbf{n}$)、押される向きで (外向き単位法線ベクトル \mathbf{n} と逆向き)、大きさは $p = p(\mathbf{x}, t)$ で \mathbf{n} にはよらない。

学校の理科で、止まっている水の力学として聞いたことがあるかもしれない。

5.7 流体力学の方程式 (2) 運動方程式 (1) 一般形

Cauchy の応力原理を認めると、外力がない場合 (流体が流体の応力だけで運動する場合)、一般に次の方程式が成立する。

$$(12) \quad \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} P \quad (\text{流体の運動方程式}).$$

ただし

$$(13) \quad \operatorname{div} P := \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{行ごとに div})$$

5.7 流体力学の方程式 (2) 運動方程式 (1) 一般形

Cauchy の応力原理を認めると、外力がない場合 (流体が流体の応力だけで運動する場合)、一般に次の方程式が成立する。

$$(12) \quad \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} P \quad (\text{流体の運動方程式}).$$

ただし

$$(13) \quad \operatorname{div} P := \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{行ごとに div})$$

証明 流体内の仮想的な領域 V で運動方程式を立てると

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathbf{x} = \int_{\partial V} P\mathbf{n} d\sigma.$$

5.7 流体力学の方程式 (2) 運動方程式 (1) 一般形

Cauchy の応力原理を認めると、外力がない場合 (流体が流体の応力だけで運動する場合)、一般に次の方程式が成立する。

$$(12) \quad \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} P \quad (\text{流体の運動方程式}).$$

ただし

$$(13) \quad \operatorname{div} P := \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{行ごとに div})$$

証明 流体内の仮想的な領域 V で運動方程式を立てると

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathbf{x} = \int_{\partial V} P \mathbf{n} d\sigma.$$

右辺のベクトルの第 i 成分に Gauss の発散定理を用いると

$$\int_{\partial V} (p_{i1}n_1 + p_{i2}n_2 + p_{i3}n_3) d\sigma = \int_{\partial V} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_V \operatorname{div} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} d\mathbf{x} = \int_V (\operatorname{div} P)_i d\mathbf{x}.$$

5.7 流体力学の方程式 (2) 運動方程式 (1) 一般形

Cauchy の応力原理を認めると、外力がない場合 (流体が流体の応力だけで運動する場合)、一般に次の方程式が成立する。

$$(12) \quad \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} P \quad (\text{流体の運動方程式}).$$

ただし

$$(13) \quad \operatorname{div} P := \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{行ごとに div})$$

証明 流体内の仮想的な領域 V で運動方程式を立てると

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathbf{x} = \int_{\partial V} P \mathbf{n} d\sigma.$$

右辺のベクトルの第 i 成分に Gauss の発散定理を用いると

$$\int_{\partial V} (p_{i1} n_1 + p_{i2} n_2 + p_{i3} n_3) d\sigma = \int_{\partial V} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_V \operatorname{div} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} d\mathbf{x} = \int_V (\operatorname{div} P)_i d\mathbf{x}.$$

$$\text{ゆえに } \int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathbf{x} = \int_V \operatorname{div} P d\mathbf{x}. \quad V \text{ は任意なので } \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \operatorname{div} P. \quad \square$$

5.7 流体力学の方程式 (2) Newton 流体の場合の $\operatorname{div} P$

(既に述べたように) Newton 流体の公理を満たすとき

$$P = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v})I + 2\mu E$$

が成り立つ。

5.7 流体力学の方程式 (2) Newton 流体の場合の $\operatorname{div} P$

(既に述べたように) Newton 流体の公理を満たすとき

$$P = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v})I + 2\mu E$$

が成り立つ。このとき $\operatorname{div} P$ を計算すると

$$(14) \quad \operatorname{div} P = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

ただし

$$\Delta \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}, \quad \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (\text{念のため}).$$

5.7 流体力学の方程式 (2) Newton 流体の場合の $\operatorname{div} P$

(既に述べたように) Newton 流体の公理を満たすとき

$$P = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v})I + 2\mu E$$

が成り立つ。このとき $\operatorname{div} P$ を計算すると

$$(14) \quad \operatorname{div} P = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

ただし

$$\Delta \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}, \quad \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (\text{念のため}).$$

特に非圧縮流体では ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ であるから)

$$(15) \quad \operatorname{div} P = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}.$$

これで準備はできた!

5.7 流体力学の方程式 (3) Navier-Stokes

非圧縮流体の運動方程式は次の形になる。

$$(16) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

これが非圧縮粘性流体の方程式として有名な^{ナヴィエ・ストークス}**Navier-Stokes方程式**である。

ただし

$$(17) \quad \nu := \frac{\mu}{\rho}$$

とおいた。 ν を**動粘性率** (kinematic viscosity) と呼ぶ。

5.7 流体力学の方程式 (3) Euler 方程式

特に完全流体の場合は ($\mu = 0$ であるから)

$$(18) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p.$$

これが非圧縮完全流体の方程式として有名な^{オイラー}**Euler方程式**である。

Euler 方程式は、左辺が加速度、右辺が“圧力勾配 (pressure gradient)” $\times(-1/\rho)$ で、割と分かりやすい。Navier-Stokes 方程式は、それに粘性による引きずり効果が入っている (少し分かりにくい)。

注意: この話の流れでは、非圧縮流体で、 $\mu = 0$ と仮定して、Euler 方程式を導いたが、実は、圧縮性流体で Euler 方程式を考えることもある ($\lambda = 0$, $\mu = 0$ と仮定した、とも言える)。

5.7 流体力学の方程式 (4) Stokes 方程式

流速 ($|\mathbf{v}|$) が小さいとき、Navier-Stokes 方程式で、 $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ を無視して ($\mathbf{v} = 0$ で線形化する、とも言える)

$$(19) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

を得る。これを **Stokes 方程式** と呼ぶ。粘性非圧縮流体の遅い流れの数学モデルとして採用される。

5.7 流体力学の方程式 (4) Stokes 方程式

流速 ($|\mathbf{v}|$) が小さいとき、Navier-Stokes 方程式で、 $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ を無視して ($\mathbf{v} = 0$ で線形化する、とも言える)

$$(19) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

を得る。これを **Stokes 方程式** と呼ぶ。粘性非圧縮流体の遅い流れの数学モデルとして採用される。

この他にも線形化したもの、圧縮性流体 (最近流行している) の場合など、色々あるが、運動方程式の話はこのくらいにしておく。

5.7 流体力学の方程式 (5) 練習の勧め

今日の授業は、ほとんどが単なるお話になってしまう嫌いがあると思われる。

流体力学をある程度きちんと学ぶ場合、次のような練習がおすすめ。

- (14) を確かめよ (導関数を計算するだけだが、ベクトル解析の記号の良い練習である)。
- Navier-Stokes 方程式をベクトル表記でなく、成分表記せよ ($(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ はどういうものか、一度は書いてみよう)。
- Navier-Stokes 方程式を覚えてみよう。

5.8 流体の境界条件 (1) 粘着境界条件

解を求めるための問題設定をするとき、初期値境界値問題とするのが普通である。境界条件について説明する。

5.8 流体の境界条件 (1) 粘着境界条件

解を求めるための問題設定をするとき、初期値境界値問題とするのが普通である。境界条件について説明する。

粘性流体では、固体の壁では

$$(20) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{wall}} \quad (\text{壁の表面において})$$

を満たすことが知られている (\mathbf{v}_{wall} は壁の速度)。特に固定壁では

$$(21) \quad \mathbf{v} = 0 \quad (\text{壁の表面において})$$

を満たす。これを**粘着境界条件** (no-slip boundary condition) と呼ぶ。

数学的にはいわゆる Dirichlet 境界条件であり、扱いやすい。

5.8 流体の境界条件 (2) 滑り境界条件

一方

$$(22) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{\rho}(\mathbf{n}) \parallel \mathbf{n} \quad (\text{境界において})$$

を滑り境界条件 (slip boundary condition) と呼ぶ。

5.8 流体の境界条件 (2) 滑り境界条件

一方

$$(22) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{かつ} \quad \mathbf{p}(\mathbf{n}) \parallel \mathbf{n} \quad (\text{境界において})$$

を**滑り境界条件** (slip boundary condition) と呼ぶ。速度の垂直成分が0 (壁に沿って動く) で、応力が境界に垂直 (壁に沿う成分が0) ということである。

計算するためには方程式で表現するのが望ましい。

5.8 流体の境界条件 (2) 滑り境界条件

一方

$$(22) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{かつ} \quad \mathbf{p}(\mathbf{n}) \parallel \mathbf{n} \quad (\text{境界において})$$

を**滑り境界条件** (slip boundary condition) と呼ぶ。速度の垂直成分が0 (壁に沿って動く) で、応力が境界に垂直 (壁に沿う成分が0) ということである。

計算するためには方程式で表現するのが望ましい。

$\mathbf{p}(\mathbf{n}) \parallel \mathbf{n}$ は、3次元では

$$P\mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

と表せる。また2次元流 (まだ説明していない) では、領域の境界曲線の単位接線ベクトルを \mathbf{t} として、次式で表せる。

$$P\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0.$$

5.8 流体の境界条件 (2) 滑り境界条件

一方

$$(22) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{かつ} \quad \mathbf{p}(\mathbf{n}) \parallel \mathbf{n} \quad (\text{境界において})$$

を**滑り境界条件** (slip boundary condition) と呼ぶ。速度の垂直成分が0 (壁に沿って動く) で、応力が境界に垂直 (壁に沿う成分が0) ということである。

計算するためには方程式で表現するのが望ましい。

$\mathbf{p}(\mathbf{n}) \parallel \mathbf{n}$ は、3次元では

$$P\mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

と表せる。また2次元流 (まだ説明していない) では、領域の境界曲線の単位接線ベクトルを \mathbf{t} とし、次式で表せる。

$$P\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0.$$

注意 非粘性流体では、流体のしめる領域内で $P\mathbf{n} \parallel \mathbf{n}$ が成り立つ。 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ が滑り境界条件である、とみなしている人が多い。

5.8 流体の境界条件 (3) その他

これ以外に、応力を指定する**応力境界条件**, **摩擦型滑り境界条件**, **摩擦型漏れ境界条件**など色々あるが、それは必要になったときに説明する。

5.9 おまけ: 適切な問題のための条件

微分方程式の解を一意に定めるためには、連続の方程式、運動方程式以外に、境界条件や初期条件が必要になる。

¹等温変化ならば $\rho \propto p$. 断熱変化ならば、Poisson の法則から $\rho \propto p^{1/\gamma}$, ここで $\gamma (> 1)$ は等エントロピー指数 (isentropic exponent) と呼ばれる定数である。この辺になると温度も変化すると考えるべきなのかもしれない。

5.9 おまけ: 適切な問題のための条件

微分方程式の解を一意に定めるためには、連続の方程式、運動方程式以外に、境界条件や初期条件が必要になる。

この講義では、以下 θ や ρ は定数として議論を行うが、そうでない場合にどうすれば良いか、簡単に説明しておく。

- 温度 θ の変化を考える場合、熱方程式のような方程式を導入することになる。
- 密度 ρ の変化を考える場合は、状態方程式 $\rho = f(p)$ を導入することが多い¹。

¹等温変化ならば $\rho \propto p$. 断熱変化ならば、Poisson の法則から $\rho \propto p^{1/\gamma}$, ここで $\gamma (> 1)$ は等エントロピー指数 (isentropic exponent) と呼ばれる定数である。この辺になると温度も変化すると考えるべきなのかもしれない。

5.9 おまけ: 適切な問題のための条件

微分方程式の解を一意に定めるためには、連続の方程式、運動方程式以外に、境界条件や初期条件が必要になる。

この講義では、以下 θ や ρ は定数として議論を行うが、そうでない場合にどうすれば良いか、簡単に説明しておく。

- 温度 θ の変化を考える場合、熱方程式のような方程式を導入することになる。
- 密度 ρ の変化を考える場合は、状態方程式 $\rho = f(p)$ を導入することが多い¹。

θ や ρ は定数と仮定すると、以下の4つの条件で \mathbf{u} , p が一意的に定まると期待される。

- a) 非圧縮条件 (連続の方程式)
- b) 運動方程式 (Navier-Stokes 方程式, Stokes 方程式, Euler 方程式, etc.)
- c) 流速に関する境界条件
- d) 流速に関する初期条件 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \bar{\Omega})$

¹等温変化ならば $\rho \propto p$ 。断熱変化ならば、Poisson の法則から $\rho \propto p^{1/\gamma}$ 、ここで $\gamma (> 1)$ は等エントロピー指数 (isentropic exponent) と呼ばれる定数である。この辺になると温度も変化すると考えるべきなのかもしれない。

5.9 おまけ: 適切な問題のための条件

圧力に関しては、境界条件も初期条件も課さないことに注意しよう。

それとも少し関係するが、圧力はしばしば定数だけの不定さを持つ。実際、 \mathbf{u} , p が (a)-(d) を満たすとき、任意の定数 C に対して \mathbf{u} , $p' = p + C$ が (a)-(d) を満たすことは明らかである。

5.9 おまけ: 適切な問題のための条件

圧力に関しては、境界条件も初期条件も課さないことに注意しよう。

それとも少し関係するが、圧力はしばしば定数だけの不定さを持つ。実際、 \mathbf{u} , p が (a)-(d) を満たすとき、任意の定数 C に対して \mathbf{u} , $p' = p + C$ が (a)-(d) を満たすことは明らかである。

圧力 p を 1 つに定めるには、どこか 1 点での値を指定したり、

$$(23) \quad \int_{\Omega} p(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0 \quad (\text{平均がつねに } 0)$$

という条件をつけたりする必要がある。

5.10 おまけ: Navier-Stokes 方程式の無次元化と Reynolds 数

考えている問題に現れる長さ、速さについて、何か “代表的な” 値 L, U を取って

$$(24) \quad \mathbf{x}' := \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad t' := \frac{t}{L/U}, \quad \mathbf{u}' := \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad p' := \frac{1}{\rho U^2} p$$

とおくと、 \mathbf{x}' と t' は無次元の独立変数であり、 \mathbf{u}' と p' は無次元の従属変数である。

5.10 おまけ: Navier-Stokes 方程式の無次元化と Reynolds 数

考えている問題に現れる長さ、速さについて、何か “代表的な” 値 L, U を取って

$$(24) \quad \mathbf{x}' := \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad t' := \frac{t}{L/U}, \quad \mathbf{u}' := \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad p' := \frac{1}{\rho U^2} p$$

とおくと、 \mathbf{x}' と t' は無次元の独立変数であり、 \mathbf{u}' と p' は無次元の従属変数である。

\mathbf{x}' についての gradient, Laplacian をそれぞれ ∇', Δ' と書くことにすると

$$(25) \quad \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' = -\text{grad}' p' + \frac{1}{R} \Delta' \mathbf{u}'.$$

ただし R は

$$(26) \quad R := \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu}$$

で定義される無次元数 (dimensionless number) で、**Reynolds 数** (the Reynolds number) と呼ばれる。e を添えて R_e と書かれることも多い。

5.10 おまけ: Navier-Stokes 方程式の無次元化と Reynolds 数

考えている問題に現れる長さ、速さについて、何か“代表的な”値 L, U を取って

$$(24) \quad \mathbf{x}' := \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad t' := \frac{t}{L/U}, \quad \mathbf{u}' := \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad p' := \frac{1}{\rho U^2} p$$

とおくと、 \mathbf{x}' と t' は無次元の独立変数であり、 \mathbf{u}' と p' は無次元の従属変数である。

\mathbf{x}' についての gradient, Laplacian をそれぞれ ∇', Δ' と書くことにすると

$$(25) \quad \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' = -\text{grad}' p' + \frac{1}{R} \Delta' \mathbf{u}'.$$

ただし R は

$$(26) \quad R := \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu}$$

で定義される無次元数 (dimensionless number) で、**Reynolds 数** (the Reynolds number) と呼ばれる。e を添えて R_e と書かれることも多い。

' を取ると、“無次元化された Navier-Stokes 方程式” が得られる。

$$(27) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\text{grad } p + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{u}.$$

Reynolds 数が大きいと、乱流が発生しうようになり、数学的に扱いづらく (「Reynolds 数が十分小さければ」と仮定することが多い)、数値計算でも解きにくくなる。

5.10 おまけ: Navier-Stokes 方程式の無次元化と Reynolds 数

無次元化方程式 (25) の導出

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{U}{L} \frac{\partial}{\partial t'},$$
$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x'_1} \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x'_2} \\ \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x'_3} \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \nabla', \quad \Delta = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \frac{1}{L^2} \Delta'.$$

5.10 おまけ: Navier-Stokes 方程式の無次元化と Reynolds 数

無次元化方程式 (25) の導出

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{U}{L} \frac{\partial}{\partial t'},$$
$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x'_1} \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x'_2} \\ \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x'_3} \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \nabla', \quad \Delta = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \frac{1}{L^2} \Delta'.$$

以上を Navier-Stokes 方程式に代入して

$$\rho \left[\frac{U}{L} \frac{\partial}{\partial t'} Uu' + \left(Uu' \cdot \frac{1}{L} \nabla' \right) Uu' \right] = -\frac{1}{L} \nabla' p + \mu \frac{1}{L^2} \Delta' Uu'.$$

5.10 おまけ: Navier-Stokes 方程式の無次元化と Reynolds 数

無次元化方程式 (25) の導出

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{U}{L} \frac{\partial}{\partial t'},$$
$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x'_1} \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x'_2} \\ \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x'_3} \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \nabla', \quad \Delta = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \frac{1}{L^2} \Delta'.$$

以上を Navier-Stokes 方程式に代入して

$$\rho \left[\frac{U}{L} \frac{\partial}{\partial t'} Uu' + \left(Uu' \cdot \frac{1}{L} \nabla' \right) Uu' \right] = -\frac{1}{L} \nabla' p + \mu \frac{1}{L^2} \Delta' Uu'.$$

左辺、右辺それぞれ整理して

$$\frac{\rho U^2}{L} \left[\frac{\partial u'}{\partial t'} + (u' \cdot \nabla') u' \right] = -\frac{1}{L} \nabla' p + \frac{\mu U}{L^2}.$$

両辺を $\rho U^2/L$ で割ると

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + (u' \cdot \nabla') u' = -\frac{1}{\rho U^2} \nabla' p + \frac{\mu}{\rho U L} \Delta' u'.$$

5.10 おまけ: Navier-Stokes 方程式の無次元化と Reynolds 数

無次元化方程式 (25) の導出

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{U}{L} \frac{\partial}{\partial t'},$$
$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x'_1} \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x'_2} \\ \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x'_3} \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \nabla', \quad \Delta = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \frac{1}{L^2} \Delta'.$$

以上を Navier-Stokes 方程式に代入して

$$\rho \left[\frac{U}{L} \frac{\partial}{\partial t'} Uu' + \left(Uu' \cdot \frac{1}{L} \nabla' \right) Uu' \right] = -\frac{1}{L} \nabla' p + \mu \frac{1}{L^2} \Delta' Uu'.$$

左辺、右辺それぞれ整理して

$$\frac{\rho U^2}{L} \left[\frac{\partial u'}{\partial t'} + (u' \cdot \nabla') u' \right] = -\frac{1}{L} \nabla' p + \frac{\mu U}{L^2}.$$

両辺を $\rho U^2/L$ で割ると

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + (u' \cdot \nabla') u' = -\frac{1}{\rho U^2} \nabla' p + \frac{\mu}{\rho U L} \Delta' u'.$$

p' , R の定義 ($p' = \frac{1}{\rho U^2} p$, $R = \frac{\rho U L}{\mu}$) から、(25) を得る。

□

5.11 おまけ: 重力下の静水圧 (1) $p = -\rho gz + p_0$

池 (水が静止している) の水圧を、Navier-Stokes 方程式を解いて調べよう (非圧縮性も仮定していることになる)。

5.11 おまけ: 重力下の静水圧 (1) $p = -\rho gz + p_0$

池 (水が静止している) の水圧を、Navier-Stokes 方程式を解いて調べよう (非圧縮性も仮定していることになる)。

一様な重力場を仮定する。 $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ という単位質量あたりの外力 \mathbf{f} を含めた

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}$$

が運動方程式になる。 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ であるから $\mathbf{0} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$.

5.11 おまけ: 重力下の静水圧 (1) $p = -\rho gz + p_0$

池 (水が静止している) の水圧を、Navier-Stokes 方程式を解いて調べよう (非圧縮性も仮定していることになる)。

一様な重力場を仮定する。 $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ という単位質量あたりの外力 \mathbf{f} を含めた

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}$$

が運動方程式になる。 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ であるから $\mathbf{0} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$. 成分で書くと

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

5.11 おまけ: 重力下の静水圧 (1) $p = -\rho gz + p_0$

池 (水が静止している) の水圧を、Navier-Stokes 方程式を解いて調べよう (非圧縮性も仮定していることになる)。

一様な重力場を仮定する。 $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ という単位質量あたりの外力 \mathbf{f} を含めた

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}$$

が運動方程式になる。 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ であるから $\mathbf{0} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$. 成分で書くと

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

水面を $z = 0$ として、 $z = 0$ において、 $p = p_0 =$ 大気圧 とすると

$$p(\mathbf{x}) = -\rho gz + p_0.$$

5.11 おまけ: 重力下の静水圧 (1) $p = -\rho gz + p_0$

池 (水が静止している) の水圧を、Navier-Stokes 方程式を解いて調べよう (非圧縮性も仮定していることになる)。

一様な重力場を仮定する。 $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ という単位質量あたりの外力 \mathbf{f} を含めた

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}$$

が運動方程式になる。 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ であるから $\mathbf{0} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$. 成分で書くと

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

水面を $z = 0$ として、 $z = 0$ において、 $p = p_0 =$ 大気圧 とすると

$$p(\mathbf{x}) = -\rho gz + p_0.$$

1 m 深く潜った (z を 1 減らした) ときの、圧力の増加分 Δp (Laplacian ではない) は

$$\Delta p = -\rho g(-1) = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 1 \text{ m} = 9.8 \times 10^3 \text{ Pa}.$$

5.11 おまけ: 重力下の静水圧 (1) $p = -\rho gz + p_0$

池 (水が静止している) の水圧を、Navier-Stokes 方程式を解いて調べよう (非圧縮性も仮定していることになる)。

一様な重力場を仮定する。 $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ という単位質量あたりの外力 \mathbf{f} を含めた

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}$$

が運動方程式になる。 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ であるから $\mathbf{0} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$. 成分で書くと

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

水面を $z = 0$ として、 $z = 0$ において、 $p = p_0 =$ 大気圧 とすると

$$p(\mathbf{x}) = -\rho gz + p_0.$$

1 m 深く潜った (z を 1 減らした) ときの、圧力の増加分 Δp (Laplacian ではない) は

$$\Delta p = -\rho g(-1) = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 1 \text{ m} = 9.8 \times 10^3 \text{ Pa}.$$

大気圧 $p_0 = 1013 \text{ hPa} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ であるから、 Δp は大気圧 p_0 の 10% くらいである。だから 10 m 潜ったとき、 $\Delta p \doteq p_0$ となる訳である。

5.11 おまけ: 重力下の静水圧 (1) $p = -\rho gz + p_0$

池 (水が静止している) の水圧を、Navier-Stokes 方程式を解いて調べよう (非圧縮性も仮定していることになる)。

一様な重力場を仮定する。 $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ という単位質量あたりの外力 \mathbf{f} を含めた

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}$$

が運動方程式になる。 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ であるから $\mathbf{0} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$. 成分で書くと

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

水面を $z = 0$ として、 $z = 0$ において、 $p = p_0 =$ 大気圧 とすると

$$p(\mathbf{x}) = -\rho gz + p_0.$$

1 m 深く潜った (z を 1 減らした) ときの、圧力の増加分 Δp (Laplacian ではない) は

$$\Delta p = -\rho g(-1) = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 1 \text{ m} = 9.8 \times 10^3 \text{ Pa}.$$

大気圧 $p_0 = 1013 \text{ hPa} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ であるから、 Δp は大気圧 p_0 の 10% くらいである。だから 10 m 潜ったとき、 $\Delta p \doteq p_0$ となる訳である。

この問題は素朴な考え方で「解ける」ので、大げさな解き方のように思えるが、我々は導出した方程式をもとに考えようとしているので、無駄なことではない。

5.11 おまけ: 重力下の静水圧 (2) アルキメデスの浮力の原理

一様な重力場の下での池あるいは湖 (水が静止している) に物体 Ω を入れたとき、物体の表面は水から応力を受ける。その“合力”を求めよう。

$\operatorname{div} P + \rho \mathbf{f} = 0$ より

$$\operatorname{div} P = -\rho \mathbf{f} = -\rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \end{pmatrix}.$$

ゆえに水から受ける応力の合計は

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mathbf{p}(\mathbf{n}) d\sigma &= \int_{\partial\Omega} P \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} P d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \end{pmatrix} d\mathbf{x} = \rho g \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mathbf{e}_3 = \rho |\Omega| g \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

ただし

$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\Omega| = \Omega \text{ の体積.}$$

$\rho |\Omega|$ は「物体が押しのける水の質量」で、 $\rho |\Omega| g$ はその重さ (重力) である。つまり向きが鉛直方向の上向き (\mathbf{e}_3) で、大きさが「物体が押しのける水の重さ」に等しい力となる。これが**浮力**である。

5.12 おまけ: 粘性率、動粘性率の具体値

粘性率、動粘性率は、粘性の大きさを表す量であるが、わかりにくい。身近な流体の場合にどういう値を取るかくらい調べておこう。

問 水や空気では、粘性率、動粘性率はどういう値を取るか。温度は 20 度とする。

5.12 おまけ: 粘性率、動粘性率の具体値

粘性率、動粘性率は、粘性の大きさを表す量であるが、わかりにくい。身近な流体の場合にどういう値を取るかくらい調べておこう。

問 水や空気では、粘性率、動粘性率はどういう値を取るか。温度は 20 度とする。

答 水の場合

$$\mu = 1.005 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad \nu = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

空気の場合

$$\mu = 1.83 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad \nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}. \quad \square$$

5.12 おまけ: 粘性率、動粘性率の具体値

粘性率、動粘性率は、粘性の大きさを表す量であるが、わかりにくい。身近な流体の場合にどういう値を取るかくらい調べておこう。

問 水や空気では、粘性率、動粘性率はどういう値を取るか。温度は 20 度とする。

答 水の場合

$$\mu = 1.005 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad \nu = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

空気の場合

$$\mu = 1.83 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad \nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}. \quad \square$$

私は特に根拠なく、水の方が大きそうに思っていた。 μ については確かにそうだが、 ν については逆転している (水の ρ が 3 桁大きいのが効いている)。

5.12 おまけ: 粘性率、動粘性率の具体値

粘性率、動粘性率は、粘性の大きさを表す量であるが、わかりにくい。身近な流体の場合にどういう値を取るかくらい調べておこう。

問 水や空気では、粘性率、動粘性率はどういう値を取るか。温度は 20 度とする。

答 水の場合

$$\mu = 1.005 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad \nu = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

空気の場合

$$\mu = 1.83 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad \nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}. \quad \square$$

私は特に根拠なく、水の方が大きそうに思っていた。 μ については確かにそうだが、 ν については逆転している (水の ρ が 3 桁大きいのが効いている)。

なお、サラダ油は水の 60 ~ 80 倍程度であるという。

温度が上がると μ は小さくなる。

気体の場合は、 μ は圧力にはほとんどよらない。

5.13 渦度 駆け足の説明

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ を流体の速度場とするとき

$$\boldsymbol{\omega} := \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

を^{うずど}渦度 (vorticity) と呼ぶ。

物理的には流体粒子の“自転”の角速度の2倍と解釈できる(そうである)。

5.13 渦度 駆け足の説明

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ を流体の速度場とするとき

$$\boldsymbol{\omega} := \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

を^{うずど}渦度 (vorticity) と呼ぶ。

物理的には流体粒子の“自転”の角速度の2倍と解釈できる(そうである)。

良くある誤解 : 水槽の中で水がグルグル回っていても、渦の中心以外では $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ということがありうる。

5.13 渦度 駆け足の説明

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ を流体の速度場とするとき

$$\boldsymbol{\omega} := \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

を^{うずど}渦度 (vorticity) と呼ぶ。

物理的には流体粒子の“自転”の角速度の2倍と解釈できる(そうである)。

良くある誤解 : 水槽の中で水がグルグル回っていても、渦の中心以外では $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ということがありうる。

$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ のとき、流れは渦なし, 非回転 (irrotational), 層状 (lammelar) などという。

5.13 渦度 駆け足の説明

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ を流体の速度場とするとき

$$\boldsymbol{\omega} := \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

を^{うずど}渦度 (vorticity) と呼ぶ。

物理的には流体粒子の“自転”の角速度の2倍と解釈できる(そうである)。

良くある誤解 : 水槽の中で水がグルグル回っていても、渦の中心以外では $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ということがありうる。

$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ のとき、流れは渦なし, 非回転 (irrotational), 層状 (lammelar) などという。

しかし「渦なし」という場合、もう少し強く、ポテンシャル流である(次のスライドを見よ)という意味で使う場合があるようだ。

5.13 渦度 駆け足の説明

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ を流体の速度場とするとき

$$\boldsymbol{\omega} := \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

を^{うずど}渦度 (vorticity) と呼ぶ。

物理的には流体粒子の“自転”の角速度の2倍と解釈できる(そうである)。

良くある誤解 : 水槽の中で水がグルグル回っていても、渦の中心以外では $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ということがありうる。

$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ のとき、流れは渦なし, 非回転 (irrotational), 層状 (lammelar) などという。

しかし「渦なし」という場合、もう少し強く、ポテンシャル流である(次のスライドを見よ)という意味で使う場合があるようだ。

Lagrange の渦定理 「完全流体の、外力が保存力である流れでは、ある時刻で $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ であれば、その後も $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ である。」

ベクトル場 \mathbf{v} に対して、 $\mathbf{v} = \nabla\phi$ ($\nabla\phi = \text{grad}\phi$) を満たす ϕ が存在するとき、 ϕ を \mathbf{v} の**ポテンシャル**と呼ぶ。特に \mathbf{v} が速度場のとき、 ϕ を \mathbf{v} の**速度ポテンシャル**と呼ぶ。

速度ポテンシャルが存在する流れを、**ポテンシャル流**であるという。

ベクトル場 \mathbf{v} に対して、 $\mathbf{v} = \nabla\phi$ ($\nabla\phi = \text{grad } \phi$) を満たす ϕ が存在するとき、 ϕ を \mathbf{v} の **ポテンシャル** と呼ぶ。特に \mathbf{v} が速度場のとき、 ϕ を \mathbf{v} の **速度ポテンシャル** と呼ぶ。

速度ポテンシャルが存在する流れを、**ポテンシャル流**であるという。

ポテンシャル流は渦なしである。

(\because 一般に $\text{rot grad} = \mathbf{0}$ が成り立つので、 $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot grad } \phi = \mathbf{0}$.)

ベクトル場 \mathbf{v} に対して、 $\mathbf{v} = \nabla\phi$ ($\nabla\phi = \text{grad } \phi$) を満たす ϕ が存在するとき、 ϕ を \mathbf{v} の**ポテンシャル**と呼ぶ。特に \mathbf{v} が速度場のとき、 ϕ を \mathbf{v} の**速度ポテンシャル**と呼ぶ。

速度ポテンシャルが存在する流れを、**ポテンシャル流**であるという。

ポテンシャル流は渦なしである。

(\because 一般に $\text{rot grad} = \mathbf{0}$ が成り立つので、 $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot grad } \phi = \mathbf{0}$.)

単連結領域における渦なしの流れはポテンシャル流である。

(\because これもベクトル解析の常識 — この PDF の末尾で少し説明)

ベクトル場 \mathbf{v} に対して、 $\mathbf{v} = \nabla\phi$ ($\nabla\phi = \text{grad } \phi$) を満たす ϕ が存在するとき、 ϕ を \mathbf{v} の**ポテンシャル**と呼ぶ。特に \mathbf{v} が速度場のとき、 ϕ を \mathbf{v} の**速度ポテンシャル**と呼ぶ。

速度ポテンシャルが存在する流れを、**ポテンシャル流**であるという。

ポテンシャル流は渦なしである。

(\because 一般に $\text{rot grad} = \mathbf{0}$ が成り立つので、 $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot grad } \phi = \mathbf{0}$.)

単連結領域における渦なしの流れはポテンシャル流である。

(\because これもベクトル解析の常識 — この PDF の末尾で少し説明)

- 一般には、渦なしであっても、ポテンシャル流であるとは限らない。
- 任意の開球は単連結領域であるから、渦なしの流れは局所的にはポテンシャルを持つことが分かる。
- 多価関数のポテンシャルを認めると、より一般の渦なしの流れのポテンシャルが存在することが分かる。

ベクトル場 \mathbf{v} に対して、 $\mathbf{v} = \nabla\phi$ ($\nabla\phi = \text{grad } \phi$) を満たす ϕ が存在するとき、 ϕ を \mathbf{v} の**ポテンシャル**と呼ぶ。特に \mathbf{v} が速度場するとき、 ϕ を \mathbf{v} の**速度ポテンシャル**と呼ぶ。

速度ポテンシャルが存在する流れを、**ポテンシャル流**であるという。

ポテンシャル流は渦なしである。

(\because 一般に $\text{rot grad} = \mathbf{0}$ が成り立つので、 $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot grad } \phi = \mathbf{0}$.)

単連結領域における渦なしの流れはポテンシャル流である。

(\because これもベクトル解析の常識 — この PDF の末尾で少し説明)

- 一般には、渦なしであっても、ポテンシャル流であるとは限らない。
- 任意の開球は単連結領域であるから、渦なしの流れは局所的にはポテンシャルを持つことが分かる。
- 多価関数のポテンシャルを認めると、より一般の渦なしの流れのポテンシャルが存在することが分かる。

粗くまとめると

渦なしの流れ \equiv ポテンシャル流

5.14 ポテンシャル流

境界 $\partial\Omega$ では

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \text{grad } \phi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n}.$$

流体が非圧縮であると仮定すると

$$\Delta \phi = \text{div grad } \phi = \text{div } \mathbf{v} = 0.$$

非圧縮非粘性流のポテンシャル流では、境界上で $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ が分かっているば、速度ポテンシャル ϕ は、次の Laplace 方程式の Neumann 境界値問題の解となる。

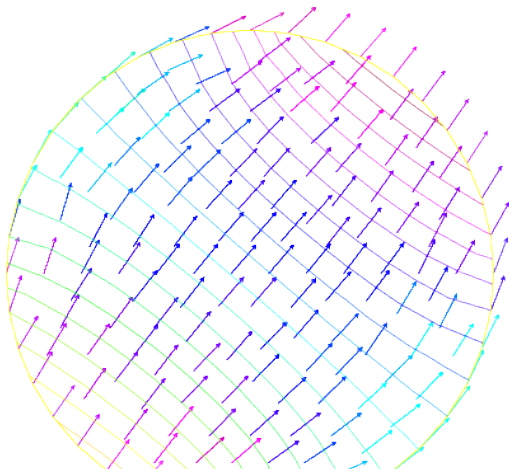
$$(28a) \quad \Delta \phi = 0 \quad (\text{in } \Omega),$$

$$(28b) \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{on } \partial\Omega).$$

ここまで運動方程式 (Euler 方程式) が出て来ていないが、それを使って、 p が求められる。

5.14 ポテンシャル流

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana2026/potential2d  
FreeFem++ potential2d-v0.edp^^I
```



5.14 ポテンシャル流

Poisson 方程式の Neumann 境界値問題

$$(29a) \quad -\Delta u = f \quad (\text{in } \Omega),$$

$$(29b) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

の解が存在するためには

$$\int_{\Omega} f \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g \, d\sigma = 0$$

が必要である。実際、

$$\int_{\partial\Omega} g \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = \int_{\Omega} \Delta u \cdot 1 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } 1 \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} f \, d\mathbf{x}.$$

逆にこの条件が成り立っていれば、解も存在する。

参考文献 I

- [1] Hecht, F.: Freefem++ (マニュアル), <https://github.com/FreeFem/FreeFem-doc/raw/pdf/FreeFEM-documentation.pdf>, 以前は <http://www3.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf> にあった。(??).
- [2] 大塚厚二, 高石武史: 有限要素法で学ぶ現象と数理 — FreeFem++ 数理思考プログラミング —, 共立出版 (2014), <https://sites.google.com/musashino-u.ac.jp/freefem/home/book/OT2014> というサポート WWW サイトがある. Maruzen eBook に入っているので, <https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000018545> でアクセス出来る.
- [3] 今井功: 流体力学 前編, 裳華房 (1973/11/20), 流体力学の基本的文献。後編は書かれなかった。
<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000108663>.
- [4] たつみともまさ 巽 友正: 流体力学, 培風館 (1982/4/15).

- [5] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 2 部, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p2.pdf> (内容はベクトル解析) (2006～).
- [6] 桂田祐史：ベクトル解析早見表, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2-2026/vector_analysis.pdf (2021/5/31～).
- [7] 岡本久, 中村周：関数解析, 岩波書店 (2006/1/26, 2016/11/10 (POD 版)), 岩波講座現代数学の基礎 (1996～1999) の分冊を単行本化したもの.