応用数値解析特論メモ No. 4

桂田 祐史

2026 年 5 月 12 日, 2026 年 5 月 19 日

1 Poisson 方程式に対する Ritz-Galerkin 法

「有限要素法への入門」
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana2026/nonopen/fem.pdf

に従い講義する (パスワードはシラバスの補足に書いてあります)。
前回 (2026/4/28) は、問題 $(\widehat{\mathrm{V}})$ を書いたところまで (§§3.1 までは解説終了)。

問題 (W)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t.

$$\langle u, v\rangle = (f, v) + [g_2, v] \quad (v \in X)$$

における弱形式そのものが見えるサンプル・プログラムを紹介した。

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/program/fem/poisson-kikuchi.edp
cat poisson-kikuchi.edp
FreeFem++ poisson-kikuchi.edp
```

poisson-kikuchi.edp

```
// poisson-kikuchi.edp
// https://m-katsurada.sakura.ne.jp/program/fem/poisson-kikuchi.edp
// 菊地文雄, 有限要素法概説, サイエンス社

int Gamma1=1, Gamma2=2;
border Gamma10(t=0,1) { x=0;   y=1-t; label=Gamma1; }
border Gamma11(t=0,1) { x=t;   y=0;   label=Gamma1; }
border Gamma20(t=0,1) { x=1;   y=t;   label=Gamma2; }
border Gamma21(t=0,1) { x=1-t; y=1;   label=Gamma2; }
int m=10;
mesh Th = buildmesh(Gamma10(m)+Gamma11(m)+Gamma20(m)+Gamma21(m));
plot(Th,wait=true,ps="Th.eps");
savemesh(Th,"Th.msh");
fespace Vh(Th,P1);
Vh u,v;
func f=1;
func g1=0;
func g2=0;
solve Poisson(u,v)=
  int2d(Th)(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v))
 -int2d(Th)(f*v)
 -int1d(Th,Gamma2)(g2*v)
 +on(Gamma1,u=g1); // on(Gamma10,Gamma11,u=g1) とも書ける。
plot(u,wait=1,ps="poisson-kikuchi.eps");
```

```
//3次元鳥瞰図
//real [int] levels =0.0:0.01:1.0;
//plot(u,dim=3,viso=levels,fill=true,wait=true);
```

また、“有限要素空間” が、三角形分割 Th 上の区分的一次多項式 (P1) であることが垣間見える。

(2026/5/19 加筆) 本日 (No. 5) の講義で以下を補足する。

次のように少し書き直すと、プログラムとの対応が良くなるかもしれない。

$$\Omega \fallingdotseq \widehat{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{m} e_k.$$

$$\widetilde{X} := \left\{ w \;\middle|\; w \text{ は } \widehat{\Omega} \text{ で連続、各三角形 } e_k \text{ で 1 次関数に一致} \right\}$$

とおくと

$$\widehat{X}_{g_1} = \left\{ \widehat{g_1} + \sum_{j=1}^{m} \;\middle|\; (a_1, \cdots, a_m) \in \mathbb{R}^m \right\} = \left\{ w \in \widetilde{X} \;\middle|\; w = \widehat{g_1} \quad \text{on } \Gamma_1 \right\},$$

$$\widehat{X} = \left\{ \sum_{j=1}^{m} \;\middle|\; (a_1, \cdots, a_m) \in \mathbb{R}^m \right\} = \left\{ w \in \widetilde{X} \;\middle|\; w = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \right\}.$$

$\widehat{\Omega}$ が Th に、$\widetilde{X}$ が Vh に対応する。

u を $\widehat{X}_{g_1}$ で探すことは、on(Gamma1,u=g1) で表している。

2026/5/12 は §§3.5 の途中まで。

参考文献