応用数値解析特論 第9回
～発展系の数値解析 (1)～

かつらだ まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana2023/

2023年6月20日

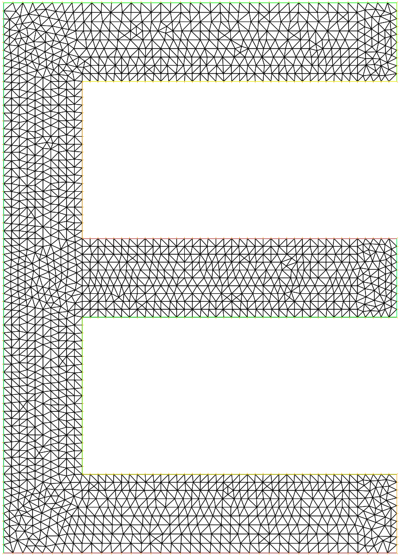
目次

本日の内容

- 前回の実習で扱った問題のフォローをする。
- 発展系の有限要素解析を説明するため、熱方程式に対する差分法を超駆け足で解説する (スライドは少し詳しめ)。
- それから、ようやく有限要素法で解く話になる。サンプル・プログラムを提示して解説する。今日はあまり深い話は出来ないかも。

前回の実習の始末 (1) 領域を定義して分割する

出席した人は、ほぼ全員領域の定義とそのメッシュ分割はできたと思っていますが…



(1) 領域を定義して分割する (つづき)

境界を 12 本の線分 (Gamma1 ∼ Gamma12) に分ければ簡単。境界条件は Neumann 境界条件だけなので、ラベルを使う必要はないだろう。各部分は長さに応じて分割すると良い。

コードは非公開 (授業ではちょっと見せた)。

(2) 弱形式を作る

既に何回も採り上げた

$$-\triangle u = f, \quad u = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2)$$

で $\Gamma_1 = \emptyset$, $f = 0$ の場合である。もしも g_2 が一度に定義できるならば、これまでとほぼ同様にして

```
solve Poisson(u,v)=
  int2d(Th)(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v))-int2d(Th)(f*v)
 -int1d(Th,Gamma1,Gamma5,Gamma9)(g2*v);
```

g_2 を一度に定義できない場合も、境界の部分ごとに分ければ簡単であろう。

```
solve Poisson(u,v)=
  int2d(Th)(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v))-int2d(Th)(f*v)
 -int1d(Th,Gamma1)(g21*v)
 -int1d(Th,Gamma5)(g25*v)
 -int1d(Th,Gamma9)(g29*v);
```

(3) 弱形式を作る (つづき)

最初、次のような関数 g_2 を定義して使おうとしたが、うまく行かなかった。

```
func real g2(real x, real y)
{
  if (x == 5.0) {
     if (y >= 0.0 && y <= 1.0)
         return 2.0;
     else if (y >= 3.0 && y <= 4.0)
         return 1.0;
     else if (y >= 6.0 && y <= 7.0)
         return -3.0;
  }
  else
    return 0.0;
}
```

次のコードは動いた。

```
func g2=2.0*(y>=0.0)*(y<=1.0)+1.0*(y>=3.0)*(y<=4.0)-3.0*(y>=6.0)*(y<=7.0)
```

(4) 可視化

`fespace` で定義したものは、`plot()` で等高線・鳥瞰図・ベクトル場を描くことができる。

これはサンプル・プログラムで説明する。

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana2023/testplot.edp
cat testplot.edp
FreeFem++ testplot.edp
```

ベクトル場の描画　ポテンシャル問題の解 (速度ポテンシャル) が `u` に求められていれば、次のようにして速度場 ($\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} u$) が描ける。

```
// ベクトル場の表示
Vh u1,u2;
u1=dx(u);
u2=dy(u);
plot([u1,u2],wait=1);
```

時間の経過に伴い変化する系 (発展系) のシミュレーションを考える。

要点は、空間方向は有限要素近似し、時間方向は差分近似する、というもの。

そのため、差分法について大急ぎで説明する。

差分法について、より詳しい解説は、例えば桂田 [1], [2] の第 1 章を見よ。

次の熱方程式の初期値境界値を例題として取り上げる。

(1a) $$u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)\quad ((x,t)\in(0,1)\times(0,\infty)),$$

(1b) $$u(0,t)=\alpha\quad (t\in(0,\infty)),$$

(1c) $$u_x(1,t)=\beta\quad (t\in(0,\infty)),$$

(1d) $$u(x,0)=u_0(x)\quad (x\in[0,1]).$$

8.1.1 格子点

未知関数 u の定義域 $[0,1]\times[0,\infty)$ を "格子" に分割する。

具体的には、$N\in\mathbb{N}$, $\Delta t>0$ として、

$$\begin{aligned}
&\Delta x := \frac{1}{N}, \quad x_i = i\Delta x \quad (i=0,1,\cdots,N),\\
&t_n = n\Delta t \quad (n=0,1,\cdots),\\
&u_i^n = u(x_i,t_n)
\end{aligned}$$

とおく。

Δt, Δx を**刻み幅** (stepsize), (x_i,t_n) を**格子点**と呼ぶ。

u は連続変数 x, t の関数であるが、それを求めることはあきらめて、u_i^n を求めることを目標にする。

8.1.2 差分近似の公式

f が C^2 級のとき (2a) と (2b) が、f が C^3 級のとき (2c) が、f が C^4 級のとき (2d) が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&\text{(2a)} \qquad f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + O(h) \quad (h \to 0),\\
&\text{(2b)} \qquad f'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h} + O(h) \quad (h \to 0),\\
&\text{(2c)} \qquad f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (h \to 0),\\
&\text{(2d)} \qquad f''(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \quad (h \to 0).
\end{aligned}
$$

右辺の第 1 項をそれぞれ、前進差分商、後退差分商、1 階中心差分商、2 階中心差分商と呼ぶ。

左辺の導関数を右辺の第 1 項で近似することを、それぞれ前進差分近似、後退差分近似、1 階中心差分近似、2 階中心差分近似と呼ぶ。

8.1.3 熱方程式に対する差分方程式の導出

前のスライドに述べたことから

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (\Delta t \to 0),$$

$$\text{(4)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) = \frac{u_i^{n} - u_i^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (\Delta t \to 0),$$

$$\text{(5)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (\Delta x \to 0).$$

$u_t = u_{xx}$ が成り立つので、

$$\text{(6a)} \qquad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta t + \Delta x^2),$$

$$\text{(6b)} \qquad \frac{u_i^{n} - u_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta t + \Delta x^2).$$

この 2 つの式を参考に、次のスライドで差分方程式を立てる。

8.1.3 熱方程式に対する差分方程式の導出

(a) 前進 Euler 法

$$\frac{U_i^{n+1}-U_i^n}{\Delta t}=\frac{U_{i-1}^n-2U_i^n+U_{i+1}^n}{\Delta x^2}.$$

これを書き直すと (ただし $\lambda:=\Delta t/\Delta x^2$ とおく)

$$U_i^{n+1}=(1-2\lambda)U_i^n+\lambda\left(U_{i-1}^n+U_{i+1}^n\right)\quad(1\le i\le N-1,\ n=0,1,2,\cdots).$$

(b) 後退 Euler 法

$$\frac{U_i^n-U_i^{n-1}}{\Delta t}=\frac{U_{i-1}^n-2U_i^n+U_{i+1}^n}{\Delta x^2}\quad(1\le i\le N-1,\ n=1,2,\cdots).$$

これを書き直すと

$$(1+2\lambda)U_i^{n+1}-\lambda\left(U_{i-1}^{n+1}+U_{i+1}^{n+1}\right)=U_i^n\quad(1\le i\le N-1,\ n=0,1,2,\cdots).$$

(c) θ 法　これは (a) と (b) を "混ぜた" ものである。$0\le\theta\le 1$ を満たす θ を固定して

$$\frac{U_i^{n+1}-U_i^n}{\Delta t}=(1-\theta)\frac{U_{i-1}^n-2U_i^n+U_{i+1}^n}{\Delta x^2}+\theta\frac{U_{i-1}^{n+1}-2U_i^{n+1}+U_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

これを書き直すと

(7)　$$(1+2\theta\lambda)U_i^{n+1}-\theta\lambda\left(U_{i-1}^{n+1}+U_{i+1}^{n+1}\right)=\left[1-2(1-\theta)\lambda\right]U_i^n+(1-\theta)\lambda\left(U_{i-1}^n+U_{i+1}^n\right).$$

$\theta=0$ のとき *(a)* の前進 *Euler* 法、$\theta=1$ のとき *(b)* の後退 *Euler* 法と一致する。そこで以下では *(c)* θ 法の式のみ書く。$\theta=1/2$ の場合は *Crank-Nicolson* 法と呼ばれる。

2023/6/20 の授業では、次の 8.1.4, 8.1.5 はカットした。

8.1.4 境界条件に対する差分方程式　Dirichlet 境界条件

$u(0,t)=\alpha$ であるから、次の方程式を課すのが自然であろう。

(8)
$$U_0^{n+1}=\alpha \quad (n=1,2,\dots).$$

$u(0,t)=\alpha$ であるから、次の方程式を課すのが自然であろう。

(8)
$$U_0^{n+1}=\alpha \quad (n=1,2,\dots).$$

$i=1$ の場合の (7)、つまり

$$(1+2\theta\lambda)U_1^{n+1}-\theta\lambda\left(U_0^{n+1}+U_2^{n+1}\right)=(1-2(1-\theta)\lambda)U_1^n+(1-\theta)\lambda\left(U_0^n+U_2^n\right)$$

に (8) を代入して、U_0^{n+1} を消去し、移項すると

$u(0,t)=\alpha$ であるから、次の方程式を課すのが自然であろう。

(8) $$U_0^{n+1}=\alpha \quad (n=1,2,\dots).$$

$i=1$ の場合の (7)、つまり

$$(1+2\theta\lambda)U_1^{n+1}-\theta\lambda\left(U_0^{n+1}+U_2^{n+1}\right)=(1-2(1-\theta)\lambda)U_1^n+(1-\theta)\lambda\left(U_0^n+U_2^n\right)$$

に (8) を代入して、U_0^{n+1} を消去し、移項すると

(9) $$(1+2\theta\lambda)U_1^{n+1}-\theta\lambda U_2^{n+1}=(1-2(1-\theta)\lambda)U_1^n+(1-\theta)\lambda\left(U_0^n+U_2^n\right)+\theta\lambda\alpha.$$

8.1.4 境界条件に対する差分方程式　Neumann 境界条件

$u_x(1, t_n) = \beta$ の近似としては、後退差分近似を用いた

$$\frac{U_N^{n+1} - U_{N-1}^{n+1}}{\Delta x} = \beta$$

が浮かぶが、この場合の誤差は $O(\Delta x)$ で精度が低い。

$u_x(1, t_n) = \beta$ の近似としては、後退差分近似を用いた

$$\frac{U_N^{n+1} - U_{N-1}^{n+1}}{\Delta x} = \beta$$

が浮かぶが、この場合の誤差は $O(\Delta x)$ で精度が低い。

番号 i が $N+1$ である仮想格子点 (x_{N+1}, t_{n+1}) を導入すると、

$$\frac{U_{N+1}^{n+1} - U_{N-1}^{n+1}}{2\Delta x} = \beta \tag{10}$$

という 1 階中心差分近似ができる。この場合の誤差は $O(\Delta x^2)$ であり、後退差分近似よりも精度が高い。

$u_x(1, t_n) = \beta$ の近似としては、後退差分近似を用いた

$$\frac{U_N^{n+1} - U_{N-1}^{n+1}}{\Delta x} = \beta$$

が浮かぶが、この場合の誤差は $O(\Delta x)$ で精度が低い。

番号 i が $N+1$ である仮想格子点 (x_{N+1}, t_{n+1}) を導入すると、

$$\frac{U_{N+1}^{n+1} - U_{N-1}^{n+1}}{2\Delta x} = \beta \tag{10}$$

という 1 階中心差分近似ができる。この場合の誤差は $O(\Delta x^2)$ であり、後退差分近似よりも精度が高い。

このままでは方程式が不足するので、

$u_x(1, t_n) = \beta$ の近似としては、後退差分近似を用いた

$$\frac{U_N^{n+1} - U_{N-1}^{n+1}}{\Delta x} = \beta$$

が浮かぶが、この場合の誤差は $O(\Delta x)$ で精度が低い。

番号 i が $N+1$ である仮想格子点 (x_{N+1}, t_{n+1}) を導入すると、

(10)
$$\frac{U_{N+1}^{n+1} - U_{N-1}^{n+1}}{2\Delta x} = \beta$$

という 1 階中心差分近似ができる。この場合の誤差は $O(\Delta x^2)$ であり、後退差分近似よりも精度が高い。

このままでは方程式が不足するので、(7) が $i = N$ の場合にも成立すると仮定する。

$$(1+2\theta\lambda)U_N^{n+1} - \theta\lambda\left(U_{N-1}^{n+1} + U_{N+1}^{n+1}\right) = (1-2(1-\theta)\lambda)U_N^n + (1-\theta)\lambda\left(U_{N-1}^n + U_{N+1}^n\right).$$

(10) から得られる $U_{N+1}^{n+1} = 2\beta\Delta x + U_{N-1}^{n+1}$, $U_{N+1}^n = 2\beta\Delta x + U_{N-1}^n$ を代入すると

$$(1+2\theta\lambda)U_N^{n+1} - 2\theta\lambda U_{N-1}^{n+1} - 2\theta\lambda\beta\Delta x = \left[1-2(1-\theta)\lambda\right]U_N^n + 2(1-\theta)\lambda U_{N-1}^n + 2(1-\theta)\lambda\beta\Delta x.$$

整理して

(11)
$$(1+2\theta\lambda)U_N^{n+1} - 2\theta\lambda U_{N-1}^{n+1} = \left[1-2(1-\theta)\lambda\right]U_N^n + 2(1-\theta)\lambda U_{N-1}^n + 2\lambda\beta\Delta x.$$

8.1.5 差分方程式の行列・ベクトル表記

$2 \le i \le N-2$ に対する (7), (9), (11) は次のようにまとめられる。

$$
\begin{bmatrix}
1+2\theta\lambda & -\theta\lambda & & & \\
-\theta\lambda & 1+2\theta\lambda & -\theta\lambda & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & -\theta\lambda & 1+2\theta\lambda & -\theta\lambda \\
 & & & -2\theta\lambda & 1+2\theta\lambda
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{N-1}^{n+1} \\ U_N^{n+1}
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
[1-2(1-\theta)\lambda]U_1^n + (1-\theta)\lambda\left(U_0^n + U_2^n\right) \\
\vdots \\
(1-2(1-\theta)\lambda)\, U_i^n + (1-\theta)\lambda\left(U_{i-1}^n + U_{i+1}^n\right) \\
\vdots \\
(1-2(1-\theta)\lambda)\, U_N^n + 2(1-\theta)\lambda U_{N-1}
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
\theta\lambda\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2\beta\lambda\Delta x
\end{bmatrix}.
$$

この右辺の第 1 項は ($U_0^n = \alpha$ に注意して) 次のように表せる。

$$
\begin{bmatrix}
1-2\,(1-\theta)\,\lambda & (1-\theta)\lambda & & & \\
(1-\theta)\lambda & 1-2\,(1-\theta)\,\lambda & (1-\theta)\lambda & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & (1-\theta)\lambda & 1-2(1-\theta)\lambda & (1-\theta)\lambda \\
 & & & 2(1-\theta)\lambda & 1-2(1-\theta)\lambda
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{N-1}^n \\ U_N^n
\end{bmatrix}.
$$

8.1.6 差分スキームの安定性 (あらっぽい説明)

簡単のため、境界条件を同次 Dirichlet 境界条件 $u(0,t) = u(1,t) = 0$ とする。

$\boldsymbol{U}^n := (U_i^n) = (U_1^n\ U_2^n\ \cdots U_{N-1}^n)^\top$ とする。あるノルム $\|\cdot\|$ について

$$\sup_n \|\boldsymbol{U}^n\| \leq \text{初期値・境界値から定まる量}$$

が成り立つとき、**差分スキームは安定**である、という。

8.1.6 差分スキームの安定性 (あらっぽい説明)

簡単のため、境界条件を同次 Dirichlet 境界条件 $u(0,t)=u(1,t)=0$ とする。

$\boldsymbol{U}^n := (U_i^n) = (U_1^n\ U_2^n\ \cdots U_{N-1}^n)^\top$ とする。あるノルム $\|\cdot\|$ について

$$\sup_n \|\boldsymbol{U}^n\| \leq \text{初期値・境界値から定まる量}$$

が成り立つとき、**差分スキームは安定**である、という。

最大値ノルム $\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \max_i |x_i|$ については、次の定理から安定性の条件が分かる。

定理 9.1 (離散最大値原理)

つねに $\displaystyle\max_{\substack{0\leq i\leq N\\0\leq n\leq J}} U_i^n = \max\left\{\max_{0\leq i\leq N} U_i^0, \max_{0\leq n\leq J} U_0^n, \max_{0\leq n\leq J} U_N^n\right\}$ が成り立つには、
$\theta=1$ または $(0\leq\theta<1$ かつ $\lambda\leq\frac{1}{2(1-\theta)})$ が必要十分。

例えば桂田 [1] を見よ。$\theta=0$ (陽解法) の場合は、$\lambda\leq\frac{1}{2}$ である (これは有名)。

離散化する前の熱方程式にも、最大値原理と呼ばれる定理が成り立つ。これについては、偏微分方程式の入門テキスト (例えば桂田 [3]) を見よ。

8.1.6 差分スキームの安定性 (あらっぽい説明)

差分解に対して

$$\boldsymbol{U}^{n+1} = R\boldsymbol{U}^n$$

のような行列 R が存在することが示される。$\boldsymbol{U}^n = R^n\boldsymbol{U}^0$ が成り立つ。

8.1.6 差分スキームの安定性 (あらっぽい説明)

差分解に対して

$$\boldsymbol{U}^{n+1} = R\boldsymbol{U}^n$$

のような行列 R が存在することが示される。$\boldsymbol{U}^n = R^n \boldsymbol{U}^0$ が成り立つ。

ノルムとして

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 := \left(\frac{1}{N}\sum_i |x_i|^2\right)^{1/2}$$

を採用した場合は、行列 R のスペクトル半径 (固有値の絶対値の最大値) で安定性の判定ができる。

8.1.6 差分スキームの安定性 (あらっぽい説明)

差分解に対して

$$\boldsymbol{U}^{n+1} = R\boldsymbol{U}^n$$

のような行列 R が存在することが示される。$\boldsymbol{U}^n = R^n\boldsymbol{U}^0$ が成り立つ。

ノルムとして

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 := \left(\frac{1}{N}\sum_i |x_i|^2\right)^{1/2}$$

を採用した場合は、行列 R のスペクトル半径 (固有値の絶対値の最大値) で安定性の判定ができる。結論だけ書く:

$$\text{(12)} \qquad \frac{1}{2} \le \theta \le 1 \quad \text{または} \quad \left(0 \le \theta < \frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad 0 < \lambda \le \frac{1}{2(1-2\theta)}\right)$$

であれば、R のスペクトル半径が 1 より小さいことが保証され、差分スキームの安定性が導かれる (例えば桂田 [4] を見よ)。

最大値ノルム $\|\cdot\|_\infty$ を採用した場合の安定性の条件 (離散最大値原理成立条件)

$$\text{(13)} \qquad \theta = 1 \quad \text{または} \quad \left(0 \le \theta < 1 \quad \text{かつ} \quad \lambda \le \frac{1}{2(1-\theta)}\right)$$

と一見似ているが、それよりは緩いことに注意しよう (ノルムの違い)。

8.1.7 大まかなまとめ

前進 Euler 法、後退 Euler 法、θ 法の差分方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t_n) = \triangle u(\cdot, t_n)$$

を、それぞれ

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \triangle u^n,$$

$$\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} = \triangle u^n \quad \text{すなわち} \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \triangle u^{n+1}$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \triangle[(1-\theta)u^n + \theta u^{n+1}]$$

と時刻について差分近似して、さらに空間についても差分近似して得られる、とみなせる (ただし、$u^n = u(\cdot, t_n)$ とおいた)。

8.1.7 大まかなまとめ

前進 Euler 法、後退 Euler 法、θ 法の差分方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t_n) = \triangle u(\cdot, t_n)$$

を、それぞれ

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \triangle u^n,$$

$$\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} = \triangle u^n \quad \text{すなわち} \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \triangle u^{n+1}$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \triangle[(1-\theta)u^n + \theta u^{n+1}]$$

と時刻について差分近似して、さらに空間についても差分近似して得られる、とみなせる (ただし、$u^n = u(\cdot, t_n)$ とおいた)。

以下では、我々は、時刻について差分近似して、空間については有限要素近似して近似方程式を作ることにする。

8.1.8 熱方程式の初期値境界値問題 (Dirichlet 境界条件) の差分法プログラム

差分法の安定性の話をする際に、従来サンプル・プログラムは C+GLSC で記述したものを紹介していたが、そういう環境を持っていない学生がいたので、以前冗談半分に FreeFem++ 言語で差分法によるプログラムを書いてみた。紹介しておく。

ただし境界条件が $u(0,t)=u(1,t)=0$ $(t\in(0,\infty))$ の場合のプログラムである。

heat1d-e-freefem.edp を入手して実行

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/program/fem/heat1d-e-freefem.edp
FreeFem++ heat1d-e-freefem.edp
```

(最初に λ の値を入力する。初期値のグラフを描いて一時停止する。ウィンドウ内で [enter] キーを打って再開。遅いので途中で中断したくなるかも。)

λ が 0.5 の場合、0.51 の場合を比べてみることを勧める。

このプログラムをこの節の例題 (1a), (1b), (1c), (1d) を解くように書き換えた人がいたら、プログラムを下さい。

8.2 熱方程式に対する有限要素法

8.2.1 例題

熱方程式 (内部で熱が発生する or 熱が吸収される) の初期値境界値問題

(14a) $$u_t(x,t) = \triangle u(x,t) + f(x) \quad ((x,t) \in \Omega \times (0,\infty)),$$

(14b) $$u(x,t) = g_1(x) \quad ((x,t) \in \Gamma_1 \times (0,\infty)),$$

(14c) $$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x,t) = g_2(x) \quad ((x,t) \in \Gamma_2 \times (0,\infty)),$$

(14d) $$u(x,0) = u_0(x) \quad (x \in \overline{\Omega})$$

を考える。多くの設定は、これまで扱ってきた Poisson 方程式の境界値問題に準じる。

熱方程式 (内部で熱が発生する or 熱が吸収される) の初期値境界値問題

(14a) $$u_t(x,t) = \triangle u(x,t) + f(x) \quad ((x,t) \in \Omega \times (0,\infty)),$$

(14b) $$u(x,t) = g_1(x) \quad ((x,t) \in \Gamma_1 \times (0,\infty)),$$

(14c) $$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x,t) = g_2(x) \quad ((x,t) \in \Gamma_2 \times (0,\infty)),$$

(14d) $$u(x,0) = u_0(x) \quad (x \in \overline{\Omega})$$

を考える。多くの設定は、これまで扱ってきた Poisson 方程式の境界値問題に準じる。

- Ω は $\mathbb{R}^2$ の有界領域で、$\Gamma := \partial\Omega$ はその境界、$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.
- $\boldsymbol{n}$ は Γ_2 上の点 x における外向き単位法線ベクトルである。
- $u \colon \overline{\Omega} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ は未知関数である。
- $u_0 \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$, $g_1 \colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}$, $g_2 \colon \Gamma_2 \to \mathbb{R}$ は既知関数とする。

熱方程式 (内部で熱が発生する or 熱が吸収される) の初期値境界値問題

$$u_t(x,t) = \triangle u(x,t) + f(x) \quad ((x,t) \in \Omega \times (0,\infty)), \tag{14a}$$

$$u(x,t) = g_1(x) \quad ((x,t) \in \Gamma_1 \times (0,\infty)), \tag{14b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x,t) = g_2(x) \quad ((x,t) \in \Gamma_2 \times (0,\infty)), \tag{14c}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (x \in \overline{\Omega}) \tag{14d}$$

を考える。多くの設定は、これまで扱ってきた Poisson 方程式の境界値問題に準じる。

- Ω は $\mathbb{R}^2$ の有界領域で、$\Gamma := \partial\Omega$ はその境界、$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.
- $\boldsymbol{n}$ は Γ_2 上の点 x における外向き単位法線ベクトルである。
- $u\colon \overline{\Omega} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ は未知関数である。
- $u_0\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $g_1\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}$, $g_2\colon \Gamma_2 \to \mathbb{R}$ は既知関数とする。

$f = f(x, t)$, $g_1 = g_1(x, t)$, $g_2 = g_2(x, t)$ と時間依存している場合の問題を解くのも難しくない。

8.2.2 解法の方針

時間微分については差分法で近似し、空間微分については有限要素法で近似する。つまり前節の最後に書いたように、まず

(15a) $$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} = \triangle u^{n+1} + f \quad (\text{後退 Euler 法の場合}),$$

あるいは

(15b) $$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} = \triangle[(1-\theta)u^n + \theta u^{n+1}] + f \quad (\theta\ \text{法の場合})$$

と時刻について差分近似してから、各時刻 t_{n+1} で (14b), (14c) と合わせて、Ω における境界値問題とみなす。

8.2.2 解法の方針

　時間微分については差分法で近似し、空間微分については有限要素法で近似する。つまり前節の最後に書いたように、まず

(15a) $$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}=\triangle u^{n+1}+f \quad (\text{後退 Euler 法の場合}),$$

あるいは

(15b) $$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}=\triangle[(1-\theta)u^n+\theta u^{n+1}]+f \quad (\theta\ \text{法の場合})$$

と時刻について差分近似してから、各時刻 t_{n+1} で (14b), (14c) と合わせて、Ω における境界値問題とみなす。すなわち、境界条件は

(16a) $$u^{n+1}=g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1),$$

(16b) $$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial \boldsymbol{n}}=g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2).$$

8.2.2 解法の方針

時間微分については差分法で近似し、空間微分については有限要素法で近似する。つまり前節の最後に書いたように、まず

(15a) $$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}=\triangle u^{n+1}+f \quad (\text{後退 Euler 法の場合}),$$

あるいは

(15b) $$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}=\triangle[(1-\theta)u^n+\theta u^{n+1}]+f \quad (\theta\ \text{法の場合})$$

と時刻について差分近似してから、各時刻 t_{n+1} で (14b), (14c) と合わせて、Ω における境界値問題とみなす。すなわち、境界条件は

(16a) $$u^{n+1}=g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1),$$

(16b) $$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial \boldsymbol{n}}=g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2).$$

(u^n が既知ならば $-\triangle u^{n+1}+cu^{n+1}=F$. Poisson 方程式ではないが、ほぼ同様に解ける)。

8.2.2 解法の方針

時間微分については差分法で近似し、空間微分については有限要素法で近似する。つまり前節の最後に書いたように、まず

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} = \triangle u^{n+1} + f \quad (\text{後退 Euler 法の場合}), \tag{15a}$$

あるいは

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} = \triangle[(1-\theta)u^n + \theta u^{n+1}] + f \quad (\theta\ \text{法の場合}) \tag{15b}$$

と時刻について差分近似してから、各時刻 t_{n+1} で (14b), (14c) と合わせて、Ω における境界値問題とみなす。すなわち、境界条件は

$$u^{n+1} = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1), \tag{16a}$$

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial \boldsymbol{n}} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2). \tag{16b}$$

(u^n が既知ならば $-\triangle u^{n+1} + cu^{n+1} = F$. Poisson 方程式ではないが、ほぼ同様に解ける)。

以下、内積の記号 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $(\cdot,\cdot)$, $[\cdot,\cdot]$ や、関数空間 $\hat{X}_{g_1}$, $\hat{X}$ は Poisson 方程式のときのものを利用する。

8.2.3 熱方程式に対する前進 Euler 法　余談

一応、時刻についての導関数 $\partial u/\partial t$ を前進差分近似した、前進 Euler 法についても述べておく。

8.2.3 熱方程式に対する前進 Euler 法　余談

一応、時刻についての導関数 $\partial u/\partial t$ を前進差分近似した、前進 Euler 法についても述べておく。

弱形式は

$$\left(\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}, v\right) - \langle u^n, v\rangle - (f, v) - [g_2, v] \quad (v \in \hat{X}). \tag{17}$$

すなわち

$$(u^{n+1}, v) - (u^n, v) + \Delta t\langle u^n, v\rangle - \Delta t(f, v) - \Delta t[g_2, v] = 0 \quad (v \in \hat{X}) \tag{18}$$

となる。

8.2.3 熱方程式に対する前進 Euler 法　余談

一応、時刻についての導関数 $\partial u/\partial t$ を前進差分近似した、前進 Euler 法についても述べておく。

弱形式は

$$(17)\qquad \left(\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}, v\right) - \langle u^n, v\rangle - (f, v) - [g_2, v] \quad (v \in \hat{X}).$$

すなわち

$$(18)\quad (u^{n+1}, v) - (u^n, v) + \Delta t\langle u^n, v\rangle - \Delta t(f, v) - \Delta t[g_2, v] = 0 \quad (v \in \hat{X})$$

となる。

これは私が不勉強なのかもしれないが、この方法を使うプログラムは見たことがない。差分法の場合と違って陽解法でないので (つまり u^{n+1} を求めるのに、結局は連立 1 次方程式を解く必要がある) メリットがないからだろうか (と考えている)。安定性を調べるのは意味があるので、数値実験してみても良いだろう。

8.2.4 熱方程式に対する後退 Euler 法

まず後退 Euler 法のプログラムを紹介しよう。弱形式は

$$\left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}, v\right) + \langle u^n, v\rangle - (f, v) - [g_2, v] = 0.$$

すなわち

$$\left(u^{n+1}, v\right) - (u^n, v) + \Delta t\langle u^{n+1}, v\rangle - \Delta t(f, v) - \Delta t[g_2, v] = 0.$$

8.2.4 熱方程式に対する後退 Euler 法

まず後退 Euler 法のプログラムを紹介しよう。弱形式は

$$\left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}, v\right) + \langle u^n, v\rangle - (f, v) - [g_2, v] = 0.$$

すなわち

$$(u^{n+1}, v) - (u^n, v) + \Delta t\langle u^{n+1}, v\rangle - \Delta t(f, v) - \Delta t[g_2, v] = 0.$$

サンプル・プログラム (と参考プログラム) を用意してある。

ターミナルではこうして入手

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/program/fem/heatB.edp
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/program/fem/poisson-kikuchi-square.edp
```

次のスライドに載せてある (Δt を `tau` (τ) という変数名にしてあるのに注意)。

8.2.4 熱方程式に対する後退 Euler 法

まず後退 Euler 法のプログラムを紹介しよう。弱形式は

$$\left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}, v\right) + \langle u^n, v\rangle - (f, v) - [g_2, v] = 0.$$

すなわち

$$(u^{n+1}, v) - (u^n, v) + \Delta t\langle u^{n+1}, v\rangle - \Delta t(f, v) - \Delta t[g_2, v] = 0.$$

サンプル・プログラム (と参考プログラム) を用意してある。

ターミナルではこうして入手

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/program/fem/heatB.edp
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/program/fem/poisson-kikuchi-square.edp
```

次のスライドに載せてある (Δt を tau (τ) という変数名にしてあるのに注意)。

ループの制御変数を n (時間ステップの番号) として、problem に `,init=n` と書き足すのがミソ。最初は n が 0 であるので init は false、それ以降は $n \neq 0$ であるので init は true, と指示するのが工夫 (そうしないと毎ステップで行列を再構成してしまう)。連立 1 次方程式の係数行列が時刻 (したがって n) に依らないことに注意しよう。

8.2.4 熱方程式に対する後退 Euler 法　heatB.edp

```
// heatB.edp --- 熱方程式を後退 Euler 法 (陰解法) で解く
// http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/program/fem/heatB.edp
// 菊地文雄，有限要素法概説，サイエンス社の Poisson 方程式の問題の非定常版
int i,m=10;
real Tmax=10, tau=0.01, t;
mesh Th=square(m,m);
plot(Th,wait=true);
fespace Vh(Th,P1);
func f=1; func g1=0; func g2=0;
func u0=sin(pi*x)*sin(pi*y);
Vh u=u0, uold, v;
plot(u,cmm="t=0",wait=1);
problem heat(u,v,init=i)=
  int2d(Th)(u*v+tau*(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v)))-int2d(Th)(uold*v)
 -int2d(Th)(tau*f*v)-int1d(Th,2,3)(tau*g2*v)
 +on(1,4,u=g1);
for (i=0;i<Tmax/tau;i++) {
  uold=u;
  t=(i+1)*tau;
  heat;
  plot(u,cmm="t="+t,wait=0); // ps="heat"+i+".ps" として保存することも可能
}
plot(u,wait=1);
```

メモ: solve と problem にかかわるパラメーター

FreeFem++ ドキュメンテーションの §3.3.13 (Hecht [5]) から。

メモ: solve と problem にかかわるパラメーター

FreeFem++ ドキュメンテーションの §3.3.13 (Hecht [5]) から。

- `solver=` には LU, CG, Crout, Cholesky, GMRES, sparsesolver, UMFPACK が指定できる (最初の 5 つはアルゴリズムの名前, 説明省略)。
  デフォールトでは sparsesolver で、それは他の sparsesolver が定義されていなければ UMFPACK に等しい。それは他の直接法のソルバーが使えない場合は LU にセットされる。
  行列のメモリーへの格納の仕方は、solver により決まる。LU の場合は非対称なスカイライン (説明省略)、Crout の場合は対称なスカイライン、Cholesky の場合は正値対称なスカイライン、CG の場合は正値対称な疎行列、その他 (GMRES, sparsesolver, UMFPACK) では疎行列。

メモ: `solve` と `problem` にかかわるパラメーター

FreeFem++ ドキュメンテーションの §3.3.13 (Hecht [5]) から。

- `solver=` には LU, CG, Crout, Cholesky, GMRES, sparsesolver, UMFPACK が指定できる (最初の 5 つはアルゴリズムの名前, 説明省略)。
  デフォルトでは sparsesolver で、それは他の sparsesolver が定義されていなければ UMFPACK に等しい。それは他の直接法のソルバーが使えない場合は LU にセットされる。
  行列のメモリーへの格納の仕方は、solver により決まる。LU の場合は非対称なスカイライン (説明省略)、Crout の場合は対称なスカイライン、Cholesky の場合は正値対称なスカイライン、CG の場合は正値対称な疎行列、その他 (GMRES, sparsesolver, UMFPACK) では疎行列。
- `init=`論理型の式
  `false` または 0 のとき、行列が再構成 (reconstruct) される、とある。初期化されているかどうか、という意味か？

メモ: solve と problem にかかわるパラメーター

FreeFem++ ドキュメンテーションの §3.3.13 (Hecht [5]) から。

- solver= には LU, CG, Crout, Cholesky, GMRES, sparsesolver, UMFPACK が指定できる (最初の 5 つはアルゴリズムの名前, 説明省略)。
  デフォールトでは sparsesolver で、それは他の sparsesolver が定義されていなければ UMFPACK に等しい。それは他の直接法のソルバーが使えない場合は LU にセットされる。
  行列のメモリーへの格納の仕方は、solver により決まる。LU の場合は非対称なスカイライン (説明省略)、Crout の場合は対称なスカイライン、Cholesky の場合は正値対称なスカイライン、CG の場合は正値対称な疎行列、その他 (GMRES, sparsesolver, UMFPACK) では疎行列。
- init=論理型の式
  false または 0 のとき、行列が再構成 (reconstruct) される、とある。初期化されているかどうか、という意味か？
- eps=実数型の式
  反復法の停止則を指定する。
  $\varepsilon < 0$ の場合は $\|Ax - b\| < |\varepsilon|$, $\varepsilon > 0$ の場合は $\|Ax - b\| < \frac{|\varepsilon|}{\|Ax_0 - b\|}$
  (と書いてあるけれど、$\frac{\|Ax-b\|}{\|Ax_0-b\|} < |\varepsilon|$ の間違いではないかな？)

(連立１次方程式のアルゴリズムを学んだことがないと、少し分かりにくいかも…)

8.2.5 熱方程式に対する θ 法

(19) $$u^{n+\theta} := \theta u^{n+1} + (1-\theta)u^n$$

とおいて

(20a) $$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} = \triangle u^{n+\theta} + f \quad (\text{in } \Omega),$$

(20b) $$u^{n+1} = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1),$$

(20c) $$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2).$$

(もし f や g_2 が時間依存する場合は、f や g_2 は $t = t_{n+1}$ のときの値を用いる。)

8.2.5 熱方程式に対する θ 法

(19) $$u^{n+\theta} := \theta u^{n+1} + (1-\theta) u^n$$

とおいて

(20a) $$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} = \triangle u^{n+\theta} + f \quad (\text{in } \Omega),$$

(20b) $$u^{n+1} = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1),$$

(20c) $$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2).$$

(もし f や g_2 が時間依存する場合は、f や g_2 は $t = t_{n+1}$ のときの値を用いる。)

弱形式は

(21) $$\frac{1}{\Delta t}\left(u^{n+1} - u^n, v\right) + \langle u^{n+\theta}, v\rangle - (f, v) - [g_2, v] = 0.$$

すなわち

(22) $$\left(u^{n+1}, v\right) - (u^n, v) + \Delta t \theta \langle u^{n+1}, v\rangle + \Delta t (1-\theta)\langle u^n, v\rangle - \Delta t (f, v) - \Delta t [g_2, v] = 0.$$

8.2.5 熱方程式に対する θ 法

$$u^{n+\theta} := \theta u^{n+1} + (1-\theta)u^n \tag{19}$$

とおいて

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} = \triangle u^{n+\theta} + f \quad (\text{in } \Omega), \tag{20a}$$

$$u^{n+1} = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1), \tag{20b}$$

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2). \tag{20c}$$

(もし f や g_2 が時間依存する場合は、f や g_2 は $t = t_{n+1}$ のときの値を用いる。)

弱形式は

$$\frac{1}{\Delta t}\left(u^{n+1}-u^n, v\right) + \langle u^{n+\theta}, v\rangle - (f, v) - [g_2, v] = 0. \tag{21}$$

すなわち

$$\left(u^{n+1}, v\right) - (u^n, v) + \Delta t\theta\langle u^{n+1}, v\rangle + \Delta t(1-\theta)\langle u^n, v\rangle - \Delta t(f, v) - \Delta t[g_2, v] = 0. \tag{22}$$

記憶用には (21) の方が短くて便利、プログラムを書くには (22) の方が便利であろう。

(補足) FreeFem++ についての注意

弱形式の書き方についての文法が詳しく説明されていない (私が探せないだけ？？) ので、良く分からないが、`int2d(Th)()` の括弧内に "複雑な式" を書くと、文法エラーが発生する。エラー・メッセージがとても分かりにくい。

以下に書くことが正しいかは自信がないが、θ 法のプログラムを書くときなど、ひっかっかった場合に参考にしてもらえると良いかも……(頼りない)

- `int2d(Th)(u*v-uold*v)` はエラーになる。
  `int2d(Th)(u*v)-int2d(Th)(uold*v)` とすると通る。一方で、
  `int2d(Th)(u*v+theta*tau*(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v)))` は通るので、
  `*v` が複数回現れるのがまずいと受け取っている (`*dx(v)` や `*dy(v)` は別カウントらしい)。
- `int2d(Th)(u*v)-int2d(Th)(uold*v)` は通るが、
  `int2d(Th)((u-uold)*v)` はエラーになる。これはどう考えるべきか。
- `int2d(Th)(tau*f*v)` を `tau*int2d(Th)(f*v)` とするとエラーになる。
  定数であっても `int2d(Th)()` の外には出さず、`+int2d()()` あるいは `-int2d()()` だけで済ませる。

私は極力分けるようにしている。$\pm$`int2d(Th)()` の個数が増えて叱られたことはない。

8.2.6 実習課題

1. 2 つのプログラム (`poisson-kikuchi-square.edp`, `heatB.edp`) を入手&実行し、熱方程式版の最終結果 ($t = \mathrm{T}_{\mathrm{max}}$) が、Poisson 方程式の結果とほぼ同じであることを確認せよ。

8.2.6 実習課題

1. 2 つのプログラム (`poisson-kikuchi-square.edp`, `heatB.edp`) を入手&実行し、熱方程式版の最終結果 ($t = \mathrm{T}_{\mathrm{max}}$) が、Poisson 方程式の結果とほぼ同じであることを確認せよ。
2. θ 法のプログラム `heatT.edp` を作成せよ。

8.2.6 実習課題

1. 2 つのプログラム (`poisson-kikuchi-square.edp`, `heatB.edp`) を入手&実行し、熱方程式版の最終結果 ($t = \mathrm{T}_{\max}$) が、Poisson 方程式の結果とほぼ同じであることを確認せよ。
2. θ 法のプログラム `heatT.edp` を作成せよ。
3. ある程度分割を細かくして、`init=` の指定の効果を調べよ。
(指定しないと遅く、指定しないで `solver=CG` とすると少し速くなるが、CG 法にせず直接法の系統で `init=` を指定した方が速い (ようである)。)
実行時間は `time` コマンドで計測できる (`time FreeFem++ heatB.edp`)。

8.2.6 実習課題

1. 2 つのプログラム (`poisson-kikuchi-square.edp`, `heatB.edp`) を入手&実行し、熱方程式版の最終結果 ($t = \mathrm{T}_{\mathrm{max}}$) が、Poisson 方程式の結果とほぼ同じであることを確認せよ。
2. θ 法のプログラム `heatT.edp` を作成せよ。
3. ある程度分割を細かくして、`init=` の指定の効果を調べよ。
(指定しないと遅く、指定しないで `solver=CG` とすると少し速くなるが、CG 法にせず直接法の系統で `init=` を指定した方が速い (ようである)。)
実行時間は `time` コマンドで計測できる (`time FreeFem++ heatB.edp`)。
4. 安定性について実験的に調べよ。(長方形領域における差分法では、$1/2 \le \theta \le 1$ の場合は無条件安定、$0 \le \theta < 1/2$ の場合は $0 < \lambda \le \dfrac{1}{2(1-2\theta)}$ が安定のための必要十分条件であった。ただし $\lambda = \dfrac{\Delta t}{\Delta x^2} + \dfrac{\Delta t}{\Delta y^2}$.
… 有限要素法の場合は、このような簡単な判定条件は得られないが、θ が 1 に近い時、0 に近い時、Δt を変えて、安定に計算出来るかどうか試してみる。)

8.2.6 実習課題

1. 2つのプログラム (`poisson-kikuchi-square.edp`, `heatB.edp`) を入手&実行し、熱方程式版の最終結果 ($t = \mathrm{T}_{\mathrm{max}}$) が、Poisson 方程式の結果とほぼ同じであることを確認せよ。
2. θ 法のプログラム `heatT.edp` を作成せよ。
3. ある程度分割を細かくして、`init=` の指定の効果を調べよ。
(指定しないと遅く、指定しないで `solver=CG` とすると少し速くなるが、CG 法にせず直接法の系統で `init=` を指定した方が速い (ようである)。)
実行時間は `time` コマンドで計測できる (`time FreeFem++ heatB.edp`)。
4. 安定性について実験的に調べよ。(長方形領域における差分法では、$1/2 \le \theta \le 1$ の場合は無条件安定、$0 \le \theta < 1/2$ の場合は $0 < \lambda \le \dfrac{1}{2(1-2\theta)}$ が安定のための必要十分条件であった。ただし $\lambda = \dfrac{\Delta t}{\Delta x^2} + \dfrac{\Delta t}{\Delta y^2}$.
⋯ 有限要素法の場合は、このような簡単な判定条件は得られないが、θ が 1 に近い時、0 に近い時、Δt を変えて、安定に計算出来るかどうか試してみる。)
5. (もし出来れば) 厳密解が分かる問題を選び、誤差を調べよ。

8.2.6 実習課題

1. 2 つのプログラム (`poisson-kikuchi-square.edp`, `heatB.edp`) を入手&実行し、熱方程式版の最終結果 ($t = \mathrm{T}_{\mathrm{max}}$) が、Poisson 方程式の結果とほぼ同じであることを確認せよ。
2. θ 法のプログラム `heatT.edp` を作成せよ。
3. ある程度分割を細かくして、`init=` の指定の効果を調べよ。
(指定しないと遅く、指定しないで `solver=CG` とすると少し速くなるが、CG 法にせず直接法の系統で `init=` を指定した方が速い (ようである)。)
実行時間は `time` コマンドで計測できる (`time FreeFem++ heatB.edp`)。
4. 安定性について実験的に調べよ。(長方形領域における差分法では、$1/2 \le \theta \le 1$ の場合は無条件安定、$0 \le \theta < 1/2$ の場合は $0 < \lambda \le \dfrac{1}{2(1-2\theta)}$ が安定のための必要十分条件であった。ただし $\lambda = \dfrac{\Delta t}{\Delta x^2} + \dfrac{\Delta t}{\Delta y^2}$.
… 有限要素法の場合は、このような簡単な判定条件は得られないが、θ が 1 に近い時、0 に近い時、Δt を変えて、安定に計算出来るかどうか試してみる。)
5. (もし出来れば) 厳密解が分かる問題を選び、誤差を調べよ。
6. 自分が選んだ問題 (領域などを変える) で数値実験してみよ。

8.2.7 その他

時間発展問題に有限要素法を適用したときの理論的解析について、日本語で読めるテキストはほとんどない (Poisson 方程式の解析より一段以上高度である)。

齊藤 [6] は貴重である。(齊藤 [7] というのもある)。

参考文献 I

[1] 桂田祐史：発展系の数値解析,
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/heat-fdm-0.pdf (1997 年〜).

[2] 桂田祐史：熱方程式に対する差分法 I — 区間における熱方程式 —,
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/heat-fdm-1.pdf (1998 年〜).

[3] 桂田祐史：微分方程式 2 講義ノート (旧「応用解析 II」),
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/pde/pde2013.pdf (1997 年〜).

[4] 桂田祐史：発展系の数値解析の続き,
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/heat-fdm-0-add.pdf (1997 年〜).

[5] Hecht, F.: Freefem++,
https://doc.freefem.org/pdf/FreeFEM-documentation.pdf, 以前は
http://www3.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf にあった。 (??).

[6] 齊藤宣一：熱方程式に対する有限要素法と誤差解析, 東大数理科学研究科の「応用数理特別講義 III」(2004 June) の講義ノートの縮小版. 今は公開していないみたい. 保存してある (2006 年 3 月 29 日).

参考文献 II

[7] 齊藤宣一：発展方程式の数値解析 — 最大値原理, 解析半群と有限要素法, `http://www.infsup.jp/saito/materials/110827tsukuba1.pdf` (2011/8/27).