応用数値解析特論 第 1 回

～ガイダンス, 変分法～

桂田 祐史（かつらだ まさし）
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana2023/

2023 年 4 月 11 日

目次

自己紹介

- 桂田 祐史 (かつらだ まさし)
- 専門は数値解析 (数値計算法の数理の関数解析的研究)
- 研究室は高層棟 910 号室
- 質問・相談はメールで
(メールアドレスは katurada あっと meiji どっと ac ドット jp)

授業の内容・成績評価

授業内容

授業の内容・成績評価

授業内容

- **有限要素法** (finite element method, FEM) の原理を理解する。

授業の内容・成績評価

授業内容

- **有限要素法** (finite element method, FEM) の原理を理解する。
- 微分方程式の問題を有限要素法で解くプログラムの典型例を理解して、実際に数値シミュレーションを体験する。
  (プログラミング言語としては主に FreeFem++ を用いるが、アルゴリズムの説明用に C 言語も用いる。)

授業の内容・成績評価

授業内容

- 有限要素法 (finite element method, FEM) の原理を理解する。
- 微分方程式の問題を有限要素法で解くプログラムの典型例を理解して、実際に数値シミュレーションを体験する。
(プログラミング言語としては主に FreeFem++ を用いるが、アルゴリズムの説明用に C 言語も用いる。)
- 近似解の厳密解への収束定理など理論的な説明もある程度行う (？)。

授業の内容・成績評価

授業内容

- **有限要素法** (finite element method, FEM) の原理を理解する。
- 微分方程式の問題を有限要素法で解くプログラムの典型例を理解して、実際に数値シミュレーションを体験する。
(プログラミング言語としては主に FreeFem++ を用いるが、アルゴリズムの説明用に C 言語も用いる。)
- 近似解の厳密解への収束定理など理論的な説明もある程度行う (？)。

参考まで ▸ シラバス (特に後半は内容を差し替える可能性がある。)

授業の内容・成績評価

授業内容

- 有限要素法 (finite element method, FEM) の原理を理解する。
- 微分方程式の問題を有限要素法で解くプログラムの典型例を理解して、実際に数値シミュレーションを体験する。
(プログラミング言語としては主に FreeFem++ を用いるが、アルゴリズムの説明用に C 言語も用いる。)
- 近似解の厳密解への収束定理など理論的な説明もある程度行う (?)。

参考まで ▸ シラバス (特に後半は内容を差し替える可能性がある。)

資料は次のサイトにおきます (スライド PDF からリンクを張りますが…)。

`https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana2023/`

(一部の資料はパスワード付きです。パスワードは「シラバスの補足」に書く予定。)

授業の内容・成績評価

授業内容

- **有限要素法** (finite element method, FEM) の原理を理解する。
- 微分方程式の問題を有限要素法で解くプログラムの典型例を理解して、実際に数値シミュレーションを体験する。
(プログラミング言語としては主に FreeFem++ を用いるが、アルゴリズムの説明用に C 言語も用いる。)
- 近似解の厳密解への収束定理など理論的な説明もある程度行う (？)。

参考まで ▸ シラバス (特に後半は内容を差し替える可能性がある。)

資料は次のサイトにおきます (スライド PDF からリンクを張りますが…)。

`https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana2023/`

(一部の資料はパスワード付きです。パスワードは「シラバスの補足」に書く予定。)

成績評価　各自興味のある問題について、(a) 数理モデル (偏微分方程式) の説明, (b) 弱定式化, (c) プログラム, (d) シミュレーション結果, (e) シミュレーション結果の分析　以上をまとめたレポートにより成績評価する。

有限要素法とは？

(以下に出て来る言葉の多くは、今後説明していくので、現時点で知らなくても構わない。)

有限要素法 (FEM) は、

- (a) (偏) 微分方程式の数値解法 (近似解を求める数値計算法) の一種
  差分法 (finite difference method, FDM) [1] と双璧
- (b) (広い意味での) **Galerkin 法**, **Ritz 法** …… **変分法**と近縁
- (c) **近似関数**として、領域を三角形・四面体などに分割して区分的多項式を用いる
- (d) “プログラムの自動化” がしやすい
  → **FreeFem++** などを使えば、自分が書くプログラムは短くて済む

Cf. 古典的な Galerkin 法, Ritz 法では、近似関数として、微分方程式に現れる微分作用素の固有関数の線形結合を用いることが多い。

[1] 差分法では、微分方程式に現れる導関数を差分商で置き換えた差分方程式を作り、その解を近似解に採用する。

受講者アンケート

必要なことは講義内で説明するつもりですが、予備知識の状況は知っておきたいので、簡単で構わないので回答して下さい (4/18 22:00 まで)。

- プログラミング、特に数値計算の経験は (どの程度) ありますか？
- 偏微分方程式について、授業等で学んだことがありますか？なじみのある (何か覚えている) 偏微分方程式がありますか？
- 偏微分方程式の数値解法として有名な差分法を勉強したことはありますか？プログラムを動かした経験はありますか？
- 変分法について勉強したことがありますか？もし出来ればどういうことを学んだか、簡単で構わないので説明して下さい。

1 変分法入門

1.1 はじめに

1 変分法入門
1.1 はじめに

汎関数の最大最小問題 (あるいはより一般に極値問題) を**変分問題** (variational problem) と呼ぶ。変分問題を扱うのが**変分法** (calculus of variations) である。

汎関数の最大最小問題 (あるいはより一般に極値問題) を**変分問題** (variational problem) と呼ぶ。変分問題を扱うのが**変分法** (calculus of variations) である。

汎関数 (functional) とは、関数を変数とする実数値関数のことをいう。言い換えると、汎関数とは、関数空間の部分集合から $\mathbb{R}$ への写像である。

1 変分法入門

1.1 はじめに

汎関数の最大最小問題 (あるいはより一般に極値問題) を**変分問題** (variational problem) と呼ぶ。変分問題を扱うのが**変分法** (calculus of variations) である。

汎関数 (functional) とは、関数を変数とする実数値関数のことをいう。言い換えると、汎関数とは、関数空間の部分集合から $\mathbb{R}$ への写像である。

有限要素法は、**変分法**と近縁で、変分法の解説が参考になるところが多い。変分法は、現代の解析学の重要なルーツの 1 つと言えるが、まとまった形で講義されることが少ない (多分適用範囲が広すぎるから)。色々なテキストがあるが、高桑 [1] (大学 1,2 年生向け), 井田 [2] (物理学のテキスト), 加藤 [3] (ほどほどに数学的) をあげておく。

1 変分法入門

1.1 はじめに

汎関数の最大最小問題 (あるいはより一般に極値問題) を**変分問題** (variational problem) と呼ぶ。変分問題を扱うのが**変分法** (calculus of variations) である。

汎関数 (functional) とは、関数を変数とする実数値関数のことをいう。言い換えると、汎関数とは、関数空間の部分集合から $\mathbb{R}$ への写像である。

有限要素法は、**変分法**と近縁で、変分法の解説が参考になるところが多い。変分法は、現代の解析学の重要なルーツの 1 つと言えるが、まとまった形で講義されることが少ない (多分適用範囲が広すぎるから)。色々なテキストがあるが、高桑 [1] (大学 1,2 年生向け), 井田 [2] (物理学のテキスト), 加藤 [3] (ほどほどに数学的) をあげておく。

等周問題 (周の長さが与えられた領域のうちで面積が最大となるものは何か？— 円であることが予想されるが、証明は？) という古典的な問題もあるが、以下では 3 つ紹介する。

1. **最短降下線**　歴史上最初の例と考えられる。
2. **最小作用の原理**　物理学で常識的な解析力学 (量子力学へ通じる)。
3. **Dirichlet 原理**　解析学で有名な弱解の方法の典型例で、有限要素法とも関係が深い。

1.2 最短降下線の問題

例 1.1 (Johann Bernoulli (1667–1748) の最短降下線 (Brachistochrone) の問題)

一様な重力場内の 2 定点 P, Q (P は Q よりも高いところにある) が与えられた時、P から Q に至る曲線に拘束されて、重力に従って移動する質点の運動 (重力以外の摩擦力、空気抵抗は無視する) を考える。

1.2 最短降下線の問題

例 1.1 (Johann Bernoulli (1667–1748) の最短降下線 (Brachistochrone) の問題)

一様な重力場内の 2 定点 P, Q (P は Q よりも高いところにある) が与えられた時、P から Q に至る曲線に拘束されて、重力に従って移動する質点の運動 (重力以外の摩擦力、空気抵抗は無視する) を考える。P が原点になるように座標軸を取り、$Q=(a_1,b_1)$ とし、経路 (曲線) を $y=u(x)$ とすると、所要時間は

(1) $$I[u] := \int_0^{a_1} \frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{\sqrt{-2gu(x)}}\,dx \quad (g \text{ は重力加速度}).$$

1.2 最短降下線の問題

例 1.1 (Johann Bernoulli (1667–1748) の最短降下線 (Brachistochrone) の問題)

一様な重力場内の 2 定点 P, Q (P は Q よりも高いところにある) が与えられた時、P から Q に至る曲線に拘束されて、重力に従って移動する質点の運動 (重力以外の摩擦力、空気抵抗は無視する) を考える。P が原点になるように座標軸を取り、$Q=(a_1,b_1)$ とし、経路 (曲線) を $y=u(x)$ とすると、所要時間は

$$(1) \qquad I[u] := \int_0^{a_1} \frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{\sqrt{-2gu(x)}}\,dx \quad (g \text{ は重力加速度}).$$

これは変数 u の関数であるから、I はいわゆる汎関数である。条件

$$(2) \qquad u(0)=0, \quad u(a_1)=b_1$$

の下で、$I[u]$ を最小とする u は何か (どのような経路か)?

Bernoulli 兄弟、Newton, Euler, . . . 色々な解き方をした (ハイラー・ネルセット・ヴァンナー [4])。

今では、**Euler-Lagrange 方程式**に帰着させる解法 (後述) が標準的である。

1.2 最短降下線の問題　(1) の導出

曲線 $y = u(x)$ 上の任意の点 (x, y) における速さを v とすると、

$$(3) \qquad v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}\right)^2 = \left[1 + u'(x)^2\right] \left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

一方、エネルギー保存則から

$$\frac{1}{2} m v^2 + mgu(x) = \frac{1}{2} m \cdot 0^2 + mg \cdot 0$$

が成り立つから

$$(4) \qquad v = \sqrt{-2gu(x)}.$$

(3), (4) から

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} = \frac{\sqrt{-2gu(x)}}{\sqrt{1 + u'(x)^2}}.$$

ゆえに所要時間は

$$I[u] := \int_0^{a_1} \frac{dt}{dx}\, dx = \int_0^{a_1} \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{\sqrt{-2gu(x)}}\, dx. \quad \square$$

(再掲 1) $$I[u] := \int_0^{a_1} \frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{\sqrt{-2gu(x)}}\,dx \quad (g \text{ は重力加速度}).$$

(再掲 2) $$u(0)=0, \quad u(a_1)=b_1.$$

少し一般化して考える。ここで

$$f(x,y,z) := \frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{-2gy}}, \quad a := 0, \quad b := a_1, \quad A := 0, \quad B := b_1$$

とおくと、(1), (2) はそれぞれ次のように書き換えられる。

$$I[u] = \int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx,$$

$$u(a)=A, \quad u(b)=B.$$

1.3 Euler-Lagrange 方程式

3 変数関数 $f = f(x, y, z)$ と、条件 $u(a) = A$, $u(b) = B$ が与えられているとき、C^1 級の $u\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ が

$$I[u] := \int_a^b f(x, u(x), u'(x))dx \tag{5}$$

を最小にするための条件を求めよ。

1.3 Euler-Lagrange 方程式

3 変数関数 $f = f(x, y, z)$ と、条件 $u(a) = A$, $u(b) = B$ が与えられているとき、C^1 級の $u\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ が

$$I[u] := \int_a^b f(x, u(x), u'(x))dx \tag{5}$$

を最小にするための条件を求めよ。

(解) u が I を最小にする関数とする。

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

を満たす任意の関数 φ を取って、

$$F(t) := I[u + t\varphi] \quad (t \in \mathbb{R})$$

とおく。

1.3 Euler-Lagrange 方程式

3 変数関数 $f = f(x, y, z)$ と、条件 $u(a) = A$, $u(b) = B$ が与えられているとき、C^1 級の $u\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ が

$$I[u] := \int_a^b f(x, u(x), u'(x))dx \tag{5}$$

を最小にするための条件を求めよ。

(解) u が I を最小にする関数とする。

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

を満たす任意の関数 φ を取って、

$$F(t) := I[u + t\varphi] \quad (t \in \mathbb{R})$$

とおく。u についての仮定から、F は $t = 0$ で最小になる。

1.3 Euler-Lagrange 方程式

3 変数関数 $f = f(x, y, z)$ と、条件 $u(a) = A$, $u(b) = B$ が与えられているとき、C^1 級の $u \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ が

$$I[u] := \int_a^b f(x, u(x), u'(x))dx \tag{5}$$

を最小にするための条件を求めよ。

(解) u が I を最小にする関数とする。

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

を満たす任意の関数 φ を取って、

$$F(t) := I[u + t\varphi] \quad (t \in \mathbb{R})$$

とおく。u についての仮定から、F は $t = 0$ で最小になる。ゆえに $F'(0) = 0$.

1.3 Euler-Lagrange 方程式

3 変数関数 $f = f(x, y, z)$ と、条件 $u(a) = A$, $u(b) = B$ が与えられているとき、C^1 級の $u \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ が

$$I[u] := \int_a^b f(x, u(x), u'(x))dx \tag{5}$$

を最小にするための条件を求めよ。

(解) u が I を最小にする関数とする。

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

を満たす任意の関数 φ を取って、

$$F(t) := I[u + t\varphi] \quad (t \in \mathbb{R})$$

とおく。u についての仮定から、F は $t = 0$ で最小になる。ゆえに $F'(0) = 0$.

$$F(t) = \int_a^b f(x, u(x) + t\varphi(x), u'(x) + t\varphi'(x))dx$$

であるから、積分記号下の微分 (微分と積分の順序交換) と合成関数の微分法によって

$$F'(t) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}\left(x, u(x) + t\varphi(x), u'(x) + t\varphi'(x)\right)\varphi(x) \right.$$
$$\left. + \frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x) + t\varphi(x), u'(x) + t\varphi'(x))\varphi'(x)\right] dx.$$

1.3 Euler-Lagrange 方程式

ゆえに

$$F'(0) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} \left(x, u(x), u'(x)\right) \varphi(x) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x))\varphi'(x) \right] dx.$$

ゆえに

$$F'(0) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} \left(x, u(x), u'(x) \right) \varphi(x) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x))\varphi'(x) \right] dx.$$

第 2 項について部分積分を実行して ($\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ に注意して)

$$\begin{aligned} F'(0) &= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) \right) \right] \varphi(x) dx \\ &\quad + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x))\varphi(x) \right]_a^b \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) \right) \right] \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

1.3 Euler-Lagrange 方程式

ゆえに

$$F'(0) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}\left(x, u(x), u'(x)\right) \varphi(x) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x))\varphi'(x) \right] dx.$$

第 2 項について部分積分を実行して ($\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ に注意して)

$$\begin{aligned} F'(0) &= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) \right) \right] \varphi(x) dx \\ &\quad + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x))\varphi(x) \right]_a^b \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) \right) \right] \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

これが任意の φ について 0 となることから、**変分法の基本補題** (後述) によって

(6)
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) \right) = 0.$$

1.3 Euler-Lagrange 方程式

ゆえに

$$F'(0) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} \left(x, u(x), u'(x)\right) \varphi(x) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x))\varphi'(x) \right] dx.$$

第 2 項について部分積分を実行して ($\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ に注意して)

$$\begin{aligned} F'(0) &= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) \right) \right] \varphi(x) dx \\ &\quad + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x))\varphi(x) \right]_a^b \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) \right) \right] \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

これが任意の φ について 0 となることから、**変分法の基本補題** (後述) によって

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) \right) = 0. \tag{6}$$

これは u についての微分方程式である。これを汎関数 I (あるいは変分問題 $\min_u I[u]$) に対する **Euler-Lagrange 方程式**と呼ぶ。

1.2 最短降下線 (再び)

最短降下線の問題では、

$$f(x,y,z)=\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{-2gy}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\sqrt{1+z^2}}{2\sqrt{2g}\left(\sqrt{-y}\right)^3},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}\sqrt{-2gy}}$$

であるから、

1.2 最短降下線 (再び)

最短降下線の問題では、

$$f(x,y,z)=\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{-2gy}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\sqrt{1+z^2}}{2\sqrt{2g}\left(\sqrt{-y}\right)^3},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}\sqrt{-2gy}}$$

であるから、その Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{2\sqrt{2g}\sqrt{-u(x)}^3}-\frac{d}{dx}\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}\sqrt{-2gu(x)}}\right)=0.$$

1.2 最短降下線 (再び)

最短降下線の問題では、

$$f(x,y,z)=\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{-2gy}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\sqrt{1+z^2}}{2\sqrt{2g}\left(\sqrt{-y}\right)^3},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}\sqrt{-2gy}}$$

であるから、その Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{2\sqrt{2g}\sqrt{-u(x)}^3}-\frac{d}{dx}\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}\sqrt{-2gu(x)}}\right)=0.$$

整理して

$$\frac{2u''(x)}{1+u'(x)^2}+\frac{1}{u(x)}=0. \tag{7}$$

最短降下線の問題では、

$$f(x,y,z)=\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{-2gy}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\sqrt{1+z^2}}{2\sqrt{2g}\left(\sqrt{-y}\right)^3},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}\sqrt{-2gy}}$$

であるから、その Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{2\sqrt{2g}\sqrt{-u(x)}^3}-\frac{d}{dx}\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}\sqrt{-2gu(x)}}\right)=0.$$

整理して

$$\frac{2u''(x)}{1+u'(x)^2}+\frac{1}{u(x)}=0. \tag{7}$$

u' をかけて積分すると (左辺の 2 項がどちらも対数微分の形)

$$\log\left(1+u'(x)^2\right)+\log|u(x)|=\log C \quad (C \text{ は正の任意定数}).$$

1.2 最短降下線 (再び)

最短降下線の問題では、

$$f(x,y,z)=\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{-2gy}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\sqrt{1+z^2}}{2\sqrt{2g}\left(\sqrt{-y}\right)^3},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}\sqrt{-2gy}}$$

であるから、その Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{2\sqrt{2g}\sqrt{-u(x)}^3}-\frac{d}{dx}\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}\sqrt{-2gu(x)}}\right)=0.$$

整理して

$$\frac{2u''(x)}{1+u'(x)^2}+\frac{1}{u(x)}=0. \tag{7}$$

u' をかけて積分すると (左辺の 2 項がどちらも対数微分の形)

$$\log\left(1+u'(x)^2\right)+\log|u(x)|=\log C \quad (C\text{ は正の任意定数}).$$

$u(x)\le 0$ に注意して整理すると $\left(1+(u')^2\right)u=-C$.

1.2 最短降下線 (再び)

最短降下線の問題では、

$$f(x,y,z)=\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{-2gy}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\sqrt{1+z^2}}{2\sqrt{2g}\left(\sqrt{-y}\right)^3},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}\sqrt{-2gy}}$$

であるから、その Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{2\sqrt{2g}\sqrt{-u(x)}^3}-\frac{d}{dx}\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}\sqrt{-2gu(x)}}\right)=0.$$

整理して

(7)
$$\frac{2u''(x)}{1+u'(x)^2}+\frac{1}{u(x)}=0.$$

u' をかけて積分すると (左辺の 2 項がどちらも対数微分の形)

$$\log\left(1+u'(x)^2\right)+\log|u(x)|=\log C\quad (C \text{ は正の任意定数}).$$

$u(x)\le 0$ に注意して整理すると $\left(1+(u')^2\right)u=-C$. u' について解くと

(8)
$$u'=-\sqrt{\frac{u+C}{-u}}.$$

が得られる。

1.2 最短降下線 (再び)

最短降下線の問題では、

$$f(x,y,z)=\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{-2gy}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\sqrt{1+z^2}}{2\sqrt{2g}\left(\sqrt{-y}\right)^3},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}\sqrt{-2gy}}$$

であるから、その Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{2\sqrt{2g}\sqrt{-u(x)}^3}-\frac{d}{dx}\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}\sqrt{-2gu(x)}}\right)=0.$$

整理して

$$\frac{2u''(x)}{1+u'(x)^2}+\frac{1}{u(x)}=0. \tag{7}$$

u' をかけて積分すると (左辺の 2 項がどちらも対数微分の形)

$$\log\left(1+u'(x)^2\right)+\log|u(x)|=\log C\quad (C \text{ は正の任意定数}).$$

$u(x)\le 0$ に注意して整理すると $\left(1+(u')^2\right)u=-C$. u' について解くと

$$u'=-\sqrt{\frac{u+C}{-u}}. \tag{8}$$

が得られる。これは変数分離型の微分方程式であるから解けて、解が**サイクロイド**となることが分かる。(有名だが結構難しい。初期条件については、岡本 [5] が参考になる。)

1.4 最小作用の原理 (解析力学の入口)

物理学で、様々な物理法則を変分問題の解が実際に起こる (実現する)、という形で表せることが多い (こういうとき変分原理が成り立つ、という)。

ここでは、知識が少なくて済む質点系の力学について、そのことを見てみよう。

入門段階の物理学では、力学の法則は Newton の運動法則として定式化されるが、それを最小作用の原理と呼ばれる変分原理が成り立つ、という形に言い換えることができる。

1.4 最小作用の原理 (解析力学の入口)

(詳しく説明する余裕はないので、情報へのリンクを張っておく: 直接の種本は加藤 [3], 他に物理学の教科書から例えば井田 [2], 古典としてアーノルド [6] をあげておく。)

1.4 最小作用の原理 (解析力学の入口)

(詳しく説明する余裕はないので、情報へのリンクを張っておく: 直接の種本は加藤 [3], 他に物理学の教科書から例えば井田 [2], 古典としてアーノルド [6] をあげておく。)

質点系の運動を考える (デカルト座標を $x_1, \ldots, x_n$ とする)。力は**保存力**で、位置エネルギー U は時刻 t によらず $x_1, \ldots, x_n$ のみによると仮定する: $U = U(x_1, \ldots, x_n)$. 運動量 $p_j = m\dot{x}_j$ を用いると、**Newton の運動方程式**は

(9) $$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x_j} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

1.4 最小作用の原理 (解析力学の入口)

(詳しく説明する余裕はないので、情報へのリンクを張っておく: 直接の種本は加藤 [3], 他に物理学の教科書から例えば井田 [2], 古典としてアーノルド [6] をあげておく。)

質点系の運動を考える (デカルト座標を $x_1, \ldots, x_n$ とする)。力は**保存力**で、位置エネルギー U は時刻 t によらず $x_1, \ldots, x_n$ のみによると仮定する: $U = U(x_1, \ldots, x_n)$. 運動量 $p_j = m\dot{x}_j$ を用いると、**Newton の運動方程式**は

$$\text{(9)} \qquad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x_j} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

運動エネルギー

$$K(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m\dot{x}_j^2$$

を用いると

$$p_j = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_j}$$

となることに注意する。

1.4 最小作用の原理 (解析力学の入口)

(詳しく説明する余裕はないので、情報へのリンクを張っておく: 直接の種本は加藤 [3], 他に物理学の教科書から例えば井田 [2], 古典としてアーノルド [6] をあげておく。)

質点系の運動を考える (デカルト座標を $x_1, \ldots, x_n$ とする)。力は**保存力**で、位置エネルギー U は時刻 t によらず $x_1, \ldots, x_n$ のみによると仮定する: $U = U(x_1, \ldots, x_n)$. 運動量 $p_j = m\dot{x}_j$ を用いると、**Newton の運動方程式**は

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x_j} \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

運動エネルギー

$$K(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m\dot{x}_j^2$$

を用いると

$$p_j = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_j}$$

となることに注意する。

一般座標 $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ を導入する。

$$\begin{cases} x_1 = x_1(\boldsymbol{q}; t) = x_1(q_1, \ldots, q_n; t) \\ \vdots \\ x_n = x_n(\boldsymbol{q}; t) = x_1(q_1, \ldots, q_n; t). \end{cases}$$

説明の補足

授業中に「これは分かりにくいかも」と考えて、説明を口頭で追加したけれど、書き留めておく。

保存力 力が保存力というのは、微分して ($\nabla = \mathrm{grad}$ を計算して) -1 をかけたものが力になるような関数が存在することで、そのような関数のことを位置エネルギーあるいはポテンシャルエネルギーと呼ぶ。

例えば、高校の力学で、$U = mgx$ が重力の位置エネルギーというのは、$\frac{\partial U}{\partial x} = -mg$ が重力になっているからであり、重力は保存力である。

一般座標 質点の位置を表すときに、空間に直交座標系を導入して、その座標 (直交座標) を用いることが多いが、問題によっては、それとは異なる量 (斜交座標、曲線座標) で位置を表すのが便利な場合もある。後者の場合に、その位置を表す量を一般座標と呼ぶ。

1.4 最小作用の原理 (解析力学の入口)

運動方程式 (9) は、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}\right) = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial K}{\partial q_k} \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

と書き直される (途中経過略 — ただの変数変換)。

1.4 最小作用の原理 (解析力学の入口)

運動方程式 (9) は、

(10) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}\right) = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial K}{\partial q_k} \quad (k = 1, \ldots, n)$$

と書き直される (途中経過略 — ただの変数変換)。

ここで **Lagrange 関数** (**Lagrangian function**) と呼ばれる

(11) $$L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) := K(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) - U(\boldsymbol{q}, t)$$

を導入すると、(10) は、

(12) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (k = 1, \ldots, n)$$

に書き直される。これを **Lagrange の運動方程式**と呼ぶ。

1.4 最小作用の原理 (解析力学の入口)

運動方程式 (9) は、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}\right) = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial K}{\partial q_k} \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

と書き直される (途中経過略 — ただの変数変換)。
ここで **Lagrange 関数** (**Lagrangian function**) と呼ばれる

$$L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) := K(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) - U(\boldsymbol{q}, t) \tag{11}$$

を導入すると、(10) は、

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{12}$$

に書き直される。これを **Lagrange の運動方程式**と呼ぶ。この (12) は、**作用** (action) あるいは**作用積分** (action integral) と呼ばれる汎関数

$$S[\boldsymbol{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\, dt$$

の Euler-Lagrange 方程式に他ならない。

1.4 最小作用の原理 (解析力学の入口)

運動方程式 (9) は、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}\right) = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial K}{\partial q_k} \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

と書き直される (途中経過略 — ただの変数変換)。

ここで **Lagrange 関数** (**Lagrangian function**) と呼ばれる

$$L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) := K(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) - U(\boldsymbol{q}, t) \tag{11}$$

を導入すると、(10) は、

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{12}$$

に書き直される。これを **Lagrange の運動方程式**と呼ぶ。この (12) は、**作用** (action) あるいは**作用積分** (action integral) と呼ばれる汎関数

$$S[\boldsymbol{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\, dt$$

の Euler-Lagrange 方程式に他ならない。つまり、質点の運動は作用積分を最小にするような軌道に沿う、ということになる。これを**最小作用の原理** (**action principle**) という。

1.4 最小作用の原理 (解析力学の入口)

運動方程式 (9) は、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot q_k}\right) = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial K}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, n) \tag{10}$$

と書き直される (途中経過略 — ただの変数変換)。

ここで **Lagrange 関数** (**Lagrangian function**) と呼ばれる

$$L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = L(q_1, \dots, q_n, \dot q_1, \dots, \dot q_n, t) := K(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) - U(\boldsymbol{q}, t) \tag{11}$$

を導入すると、(10) は、

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, n) \tag{12}$$

に書き直される。これを **Lagrange の運動方程式**と呼ぶ。この (12) は、**作用** (action) あるいは**作用積分** (action integral) と呼ばれる汎関数

$$S[\boldsymbol{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\, dt$$

の Euler-Lagrange 方程式に他ならない。つまり、質点の運動は作用積分を最小にするような軌道に沿う、ということになる。これを**最小作用の原理** (**action principle**) という。

L には直観的な物理的意味はない ($K - U$ でなく $K + U$ ならばエネルギーだが、そうではない)。S についても同様である。

説明の補足

最短降下線のときは、汎関数は

$$I[u] = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))dx$$

の形で、質点系の運動のときは汎関数は

$$\begin{aligned} S[\boldsymbol{q}] &= \int_{t_1}^{t_2} L(t, \boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t))dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_1(t), \cdots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \cdots, \dot{q}_n(t))dt \end{aligned}$$

の形である。汎関数の形が一般化されているが (実数値関数 u から、n 次元ベクトル値関数 $\boldsymbol{q}$ に変わった)、やっていることは同様であることが理解できるであろう。

関数 $u = u(x)$ も、$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t)$ も 1 変数であるが、次の例 (Dirichlet の原理) では、2 変数関数 $u = u(x, y)$ の場合を扱う (積分も重積分に置き換わる)。

(かなり広い場合に適用できる考え方である、ということだ。)

1.5 Dirichlet の原理

Riemann は、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u(x,y) = 0 \quad (\text{in } \Omega), \quad u(x,y) = \psi(x,y) \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

の解の存在を証明するために "Dirichlet の原理" を用いた (注: $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$)。

1.5 Dirichlet の原理

Riemann は、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u(x,y) = 0 \quad (\text{in } \Omega), \quad u(x,y) = \psi(x,y) \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

の解の存在を証明するために “Dirichlet の原理” を用いた (注: $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$)。

Laplace 方程式に対する **Dirichlet の原理**

Ω を $\mathbb{R}^2$ の有界領域、$\psi\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ とする。Dirichlet 境界条件 $u = \psi$ (on $\partial\Omega$) を満たす u のうちで、Dirichlet 積分と呼ばれる汎関数

$$I[u] := \iint_\Omega \left(u_x(x,y)^2 + u_y(x,y)^2\right) dx\, dy \tag{13}$$

を最小にするものは、Laplace 方程式

$$\triangle u = 0 \qquad (\text{つまり } u_{xx} + u_{yy} = 0) \tag{14}$$

を満たす。

1.5 Dirichlet の原理

Riemann は、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u(x,y)=0 \quad (\text{in } \Omega), \quad u(x,y)=\psi(x,y) \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

の解の存在を証明するために "Dirichlet の原理" を用いた (注: $\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$)。

Laplace 方程式に対する **Dirichlet の原理**

Ω を $\mathbb{R}^2$ の有界領域、$\psi\colon \partial\Omega\to\mathbb{R}$ とする。Dirichlet 境界条件 $u=\psi$ (on $\partial\Omega$) を満たす u のうちで、Dirichlet 積分と呼ばれる汎関数

$$I[u]:=\iint_\Omega \left(u_x(x,y)^2+u_y(x,y)^2\right)\,dx\,dy \tag{13}$$

を最小にするものは、Laplace 方程式

$$\triangle u=0 \qquad (\text{つまり } u_{xx}+u_{yy}=0) \tag{14}$$

を満たす。

(13) の最小性から、(14) を導く議論は次のスライドで説明するが、(先走って言えば) 前の 2 つの例と本質的に同じ原理 ($\left.\frac{d}{dt}I[u+t\varphi]\right|_{t=0}=0$) である。つまり、(14) は (13) の Euler-Lagrange 方程式である、と言える。

u で I が最小と仮定する。任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $t \in \mathbb{R}$ に対して、$u + t\varphi$ は

$$u + t\varphi = \psi \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

を満たすので、I の定義域に属している。u が最小値を与えるという仮定から、

$$I[u + t\varphi] \ge I[u].$$

ゆえに、$F(t) := I[u + t\varphi]$ とおくと、F は $t = 0$ で最小値を取る。ところが

$$F(t) = \iint_\Omega \nabla(u + t\varphi) \cdot \nabla(u + t\varphi) dx\, dy = \iint_\Omega \left(|\nabla u|^2 + 2t\nabla u \cdot \nabla\varphi + t^2 |\nabla\varphi|^2 \right) dx\, dy$$

$$= I[u] + 2t \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx + t^2 I[\varphi]$$

であるから、F が 0 で最小になるには、1 次の係数が 0 (あるいは $F'(0) = 0$ と言える):

$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx\, dy = 0.$$

これを部分積分 (Green の定理) して

$$\iint_\Omega \triangle u\, \varphi\, dx\, dy = 0.$$

φ が任意であることから、**変分法の基本補題** (次のスライド) が使えて

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega). \qquad \square$$

定理 1.2 (変分法の基本補題 (fundamental lemma of calculs of variations))

$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ が任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して、$\displaystyle\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0$ を満たすならば、実は $f = 0$ (a.e.).

$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$, a.e. (almost everywhere) という記号・用語を知らない受講者が少なくないと思われるが、今回は省略する。

1.5 Dirichlet の原理　反省, 変分法の “直接法”

Dirichlet の原理は、G. F. B. Riemann (1826–1866) による (関数論で有名な) **写像定理** (1851 年) の証明に使われたが、Riemann は I の最小値の存在を厳密に示すことができず (下限の存在は明らかだが、下限が最小値であることは明らかでない — K. T. W. Weierstrass (1815–1897) の指摘)、D. Hilbert (1862–1943) によって解決されるまで (1900 年頃)、ほぼ 50 年近い年月がかかった。

最短降下線の場合には、最短降下線という変分問題を解くために微分方程式の問題に変形し、その微分方程式を解くことによって解を得たが、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の場合には、偏微分方程式の問題を解くために変分問題に変形し、その変分問題を “直接[2]” 解く (解の存在を示す) ことによって解を得た。この論法を変分法の**直接法** (the direct methods in the caluculus of variations) と呼ぶ。

議論の方向が最短降下線のような “従来の” 変分法とは逆であることに注意しよう。こういうことは、数学のあちこちで現われる。一つの問題が一見違う形の問題と同等であるということが比較的一般的に分かっていて、どちらの問題が解きやすいかは、個々の問題による、という状況がある。

変分法は最小問題が目的とは限らない

特に、解きたい微分方程式を Euler-Lagrange 方程式とする変分問題を数値的に解くことにより微分方程式の近似解を求めることも良く行われる。有限要素法による数値計算の~~多くについてそういう解釈が出来る~~。

[2] Euler-Lagrange 方程式を作ると、最初の問題が出て来て堂々巡りになってしまう。

1.6 おまけ: 極小曲面

空間内に与えられた閉曲線 Γ に石鹸膜を張ったとき、膜の形はどうなるか？

1.6 おまけ: 極小曲面

空間内に与えられた閉曲線 Γ に石鹸膜を張ったとき、膜の形はどうなるか？— 表面張力が働くので、面積を最小にするような曲面 (**極小曲面**, minimal surface) になる。

1.6 おまけ: 極小曲面

空間内に与えられた閉曲線 Γ に石鹸膜を張ったとき、膜の形はどうなるか？— 表面張力が働くので、面積を最小にするような曲面 (**極小曲面**, minimal surface) になる。

膜が $z = u(x,y)$ $((x,y) \in \Omega)$ とグラフで表せるならば、

$$S[u] := \iint_\Omega \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\, dy$$

を最小にする、ということである。

1.6 おまけ: 極小曲面

空間内に与えられた閉曲線 Γ に石鹸膜を張ったとき、膜の形はどうなるか？— 表面張力が働くので、面積を最小にするような曲面 (**極小曲面**, minimal surface) になる。

膜が $z = u(x, y)$ $((x, y) \in \Omega)$ とグラフで表せるならば、

$$S[u] := \iint_\Omega \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\, dy$$

を最小にする、ということである。

この汎関数の Euler-Lagrange 方程式は次のようになる (極小曲面の微分方程式):

$$(1 + u_x^2)\, u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)\, u_{xx} = 0. \tag{15}$$

この微分方程式は非線形の偏微分方程式であり、簡単には解けない。

練習問題　汎関数 $S[u]$ の Euler-Lagrange 方程式として、(15) が導出される過程を書け。代表的な極小曲面 (これについては文献を探して調べよ) を二三選び、(15) を満たすことを確認せよ。さらにコンピューターで図示せよ。

参考書案内　有限要素法のテキスト

菊地 [7] は、理工系一般読者を対象とした有限要素法の入門書 (関数解析の知識は必要ない) である。Poisson 方程式に限られているが、大変明解。原理がはっきり分かるという意味では数学的。関数解析的な成分を抜いても、たくさん数学があることが分かる。この科目の前半部分の種本と言っても良い。

菊地 [8] は、有限要素法の数学 (関数解析的な事項をふくむ) についての貴重な和書。鞍点型変分原理にも詳しい。ただしページ数が限られているので、これ一冊で足りる訳ではない。

洋書にチャレンジする元気があれば、定評ある Brenner-Scott [9] を勧める (定番本)。

実際に数値計算する場合は、まず FreeFem++ を使うことを勧める。FreeFem++ のマニュアル Hecht [10] と、日本語によるテキスト大塚・高石 [11] が頼りとなるが、どちらも有限要素法それ自身のテキストにはならない。

[10] には、非常に豊富な事例が載っているが、解説には率直に言って (理解しやすいかどうかの観点から) 当たり外れがある。ネット上にあるチュートリアルを探すのが良いかもしれない (今後いくつか紹介する予定)。

参考文献 I

[1] 高桑昇一郎：微分方程式と変分法, 共立出版 (2003).

[2] 井田大輔：現代解析力学入門, 朝倉書店 (2020/1/15).

[3] 加藤敏夫：変分法, 寺沢貫一（編）, 自然科学者のための数学概論 — 応用編 —, C 編, 岩波書店 (1960).

[4] E. ハイラー, S. P. ネルセット, G. ヴァンナー：常微分方程式の数値解法 I 基礎編, シュプリンガー・ジャパン (2007).

[5] 岡本久：最大最小の物語 — 関数を通して自然の原理を理解する, ライブラリ数理科学のための数学とその展開, サイエンス社 (2019/8/18).

[6] Arnold, V. I.: 古典力学の数学的方法, 岩波書店 (1980), 安藤 韶一, 蟹江 幸博, 丹羽 敏雄 訳.

[7] 菊地文雄：有限要素法概説, サイエンス社 (1980), 新訂版 1999.

参考文献 II

[8] 菊地文雄：有限要素法の数理, 培風館 (1994), 有限要素法の解析に関する貴重な和書です。版元在庫切れ状態です。 読みたい学生は相談して下さい。

[9] Brenner, S. C. and Scott, L. R.: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods, 3rd edition*, Springer (2008).

[10] Hecht, F.: Freefem++, `http://www3.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf`.

[11] 大塚厚二, 高石武史：有限要素法で学ぶ現象と数理 — FreeFem++数理思考プログラミング —, 共立出版 (2014), `https://sites.google.com/a/comfos.org/comfos/ffempp` というサポート WWW サイトがある. Maruzen eBook に入っているので、`https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000018545` でアクセス出来る.