ベクトル値関数版 Greenの公式、部分積分

— 流体力学のために —

桂田 祐史

2009年6月14日, 2021年11月28日

目次

1　はじめに

Gauss の発散定理や Green の積分公式は、ベクトル解析の本には必ず載っている。Poisson 方程式の弱定式化を考えるにはそれで十分だが、Navier-Stokes 方程式を扱うには、もう少し準備した方が便利である。

2　常識として: Gauss の定理, Green の定理

ベクトル解析は、多変数の微分と積分がからむ分野であり、私自身は微積分のうちに含まれると考えている。必修とされていないこともあるが、学ぶべきである。

基本的な科目なので、信頼できるテキストを手元においておくことを勧めたいが、とりあえず定義を確かめたければ、例えば桂田 [1] を見よ。

2.1　記号

以下 f はスカラー場、$\boldsymbol{v} = (v_i) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ はベクトル場、$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$ はテンソル場とする。

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{grad} \boldsymbol{v} = \nabla \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \quad \operatorname{div} P = \nabla \cdot P = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial p_{13}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial p_{23}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix},$$

$$\triangle f = \nabla \cdot (\nabla f) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \quad \triangle \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \triangle v_1 \\ \triangle v_2 \\ \triangle v_3 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{u}$ を流体の速度場とする。物質微分 (material derivative) D/Dt とは

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla,$$

すなわち

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial t} + u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{Dv_1}{Dt} \\ \dfrac{Dv_2}{Dt} \\ \dfrac{Dv_3}{Dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + u_2 \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} + u_3 \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t} + u_1 \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} + u_2 \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} + u_3 \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_3}{\partial t} + u_1 \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} + u_2 \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} + u_3 \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

2 つのテンソル場 $P=(p_{ij})$, $Q=(q_{ij})$ に対して

$$P:Q := \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} p_{ij}q_{ij}$$

とおく。

方向微分係数の定義

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h\boldsymbol{a})-f(x)}{h}$$

と合成関数の微分法から

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} = \operatorname{grad}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n} = \nabla\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}.$$

2.2 いわゆる Green の定理

Gauss の定理, Green の定理は、定理に現れる用語の説明が少し面倒であるが、とりあえず "飛ばして" 定理を一応書いておく。

定理 2.1 (Gauss の発散定理) Ω を $\mathbf{R}^3$ の有界領域、$S=\partial\Omega$ は有限個の C^1 級正則曲面からなるとするとき、$\overline{\Omega}$ の近傍で定義された C^1 級のベクトル場 $\boldsymbol{f}$ に対して

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{f}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \int_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma.$$

ただし $\boldsymbol{n}$ は S の外向き単位法線ベクトル、$d\sigma$ は面積要素である。

(これは 3 次元バージョンであるが、実は何次元でも成り立つ。2 次元の場合、$C=\partial\Omega$ は曲線で、$d\sigma$ は線要素である。)

この定理の証明はそれなりに手間がかかる (特に用語の正確な説明に手間がかかるので、ここでは省略する)。しかし、それから次の定理を導くのは簡単である。

定理 2.2 (Green の定理, Green の積分公式) Ω は Gauss の発散定理が成り立つような $\mathbf{R}^n$ の有界領域で、Γ はその境界、$\boldsymbol{n}$ は Γ 上の点における外向き単位法線ベクトルとする。

(1) (Green's first identity) u, v が $\overline{\Omega}$ の近傍でそれぞれ C^2 級, C^1 級ならば

$$\int_\Omega v\,\triangle\,u\,dx = \int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\,d\sigma - \int_\Omega \operatorname{grad}v\cdot\operatorname{grad}u\,dx.$$

(2) (Green's second identity) u, v が $\overline{\Omega}$ の近傍で C^2 級ならば

$$\int_\Omega (v\,\triangle\,u - u\,\triangle\,v)\,dx = \int_\Gamma\left(v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}\right)d\sigma.$$

(3) u が $\overline{\Omega}$ の近傍で C^2 級ならば

$$\int_\Omega \triangle\,u\,dx = \int_\Gamma\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\,d\sigma.$$

特に u が調和関数である場合は $\displaystyle\int_\Gamma\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\,d\sigma = 0.$

証明

(1) $\boldsymbol{f} := v \operatorname{grad} u$ とおくと

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u + v \triangle u$$

となること (積の微分法) に注意して、Gauss の発散定理を用いる。

(2) (1) と、(1) で u と v を入れ換えた式を並べて、辺々引き算すればよい。

(3) (1) で $v \equiv 1$ とおく。 ■

Green's third identity (Laplace 作用素の基本解の議論をするとき基礎となる) というものもあるが、それは省略する (例えば桂田 [2] §3.5.2 を見よ)。

2.3 少し形式を変えて

前項の説明は定番のものであるが、少し式に触れて探ってみよう。

菊地 [3] では、次の式を Green の公式と呼んでいる。

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_\Gamma u v n_j \, d\sigma - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} v \, dx \quad (1 \le i \le N). \tag{1}$$

この形にすると "部分積分の公式" との対応が鮮明で、なるほどと感じる人がいるかもしれない。

[3] ではさらに、式 (1) で、$v \equiv 1$ とおいて得られる

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = \int_\Gamma u n_j d\sigma \tag{2}$$

を発散定理と呼んでいる。

逆に一般に (2) を仮定して、u の代りに uv を代入すると、 (1) が得られる。つまり、ある意味で (1) と (2) は同値である。

ベクトル場 $\boldsymbol{f} = (f_j)$ が与えられているとき、(2) の u として f_j を代入し、$j = 1, 2, \ldots, N$ について加えると

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{f} \, dx = \int_\Gamma \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma. \tag{3}$$

これは Gauss の発散定理である (そのためか、[3] では (2) を Gauss の発散定理と呼んでいる)。

逆に (3) で $\boldsymbol{f}$ として、第 j 成分のみ u で、他は 0 というベクトル場を持って来ると、

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = \int_\Gamma u n_j \, d\sigma$$

が得られる。つまり (2) が得られた。

要するに、出て来る関数を一般とすると、三つの式 (1), (2), (3) は同値である。

2.4 おまけ

2.4.1 物理的イメージ

grad は法線ベクトル 関数 $F \colon \Omega \to \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$ について、方程式 $F(x) = c$ の定める曲線 (曲面) を等高線 (等値面) と呼ぶ。$\operatorname{grad} F$ はそれらの法線ベクトルとなる。

流束積分　単位法線ベクトルが $\boldsymbol{n}$ である曲面 S (曲線 C) と速度場 $\boldsymbol{v}$ について

$$\int_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma \quad \left(\int_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds\right)$$

を**流束積分** (flux integral) と呼ぶ。物理的には、単位時間に S (C) を通り抜ける流体の体積 (面積) を表す。ただし、 $\boldsymbol{n}$ の向いている側に出る量を正とする (S が領域 Ω の境界で、$\boldsymbol{n}$ が外向き単位法線ベクトルの場合は、Ω の外に流出する量ということになる)。

2.4.2　微分を 2 回続けると

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\operatorname{grad} = \mathbf{0} \quad (\nabla\times\nabla f = \mathbf{0}),\\
&\operatorname{div}\operatorname{grad} = \triangle \quad (\nabla\cdot\nabla f = \triangle f),\\
&\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0 \quad (\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{u}) = 0),\\
&\operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \triangle \quad (\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) - \triangle\boldsymbol{u}).
\end{aligned}$$

2.4.3　ポテンシャルの存在

命題 2.3 (ポテンシャルの存在定理)　$\mathbf{R}^n$ の単連結領域 Ω におけるベクトル場 $\boldsymbol{f}=(f_i)$ が $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ $(1\le i\le n,\ 1\le j\le n)$ を満たすならば、$F(\boldsymbol{x}) := \displaystyle\int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ は $C_{\boldsymbol{x}}$ の取り方によらず well-defined であり、$\nabla F=\boldsymbol{f}$ を満たす。ただし $C_{\boldsymbol{x}}$ は定点から $\boldsymbol{x}$ に至る Ω 内の曲線である。

特に 3 次元ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ が $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}=\mathbf{0}$ を満たす場合、2 次元ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ が $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}=0$ を満たす場合、$\boldsymbol{f}$ はポテンシャルを持つ。

理解を深めるための注意を 2 つ

- 1 変数関数の場合の $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ に相当する。
- C^2 級のポテンシャル F が存在する場合、$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial^2 F}{\partial x_j\partial x_i}$, $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}=\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}$ であるから、$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ が成り立つことは明らかである。

3　Green の公式とベクトル値関数への拡張

流体力学の方程式を扱うためには、前項の Green の公式だけでは不十分で、次の 2 つの公式が必要になる。

$$\int_\Omega \triangle\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\,dx = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{v}\,d\sigma - \int_\Omega \nabla\boldsymbol{u}:\nabla\boldsymbol{v}\,dx.$$

$$\int_\Omega \nabla p\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx = \int_{\partial\Omega} p\,\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma - \int_\Omega p\,\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}\,dx.$$

ここでは、シンプルな結果から出発して、上の 2 式を含む使いそうな公式すべてを導出して見せる。

この手の定理は、厳密な定式化は難しいが、やっていることは非常に単純である、と理解してもらいたい。

3.1 高次元版微積分の基本定理

(ここは雑談レベル。)

$d \geq 2$ として (授業では、$d = 2$ くらいで絵を描いて説明した後、最後に 3 次元ではこうなる、と説明する)、$j \in \{1, \ldots, d\}$ を固定する。$x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{R}^d$ に対して、

$$\widehat{x} = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_d)$$

とおく。

$\Omega \subset \mathbf{R}^d$ が

$$\Omega = \{x = (x_i); \widehat{x} \in D,\ \varphi(\widehat{x}) < x_j < \psi(\widehat{x})\}$$

と表されるとき (おなじみの「縦線集合」)、

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx &= \int_D \left(\int_{\varphi(\widehat{x})}^{\psi(\widehat{x})} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j\right) d\widehat{x} \\ &= \int_D \left[u(x_1, \ldots, x_{j-1}, \psi(\widehat{x}), x_{j+1}, \ldots, x_d) - u(x_1, \ldots, x_{j-1}, \varphi(\widehat{x}), x_{j+1}, \ldots, x_d)\right] d\widehat{x}.\end{aligned}$$

図形を描いたりして、2 本ある $\partial\Omega$ のうち、上側では $n_j d\sigma = d\widehat{x}$、下側では $n_j d\sigma = -d\widehat{x}$ であることを納得してもらう。そうすると、これが $\displaystyle\int_{\partial\Omega} u n_j\,d\sigma$ に等しいことが分かる。ゆえに

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} u n_j\,d\sigma. \tag{4}$$

この形にすると、縦線領域でない Ω に対しても通用する公式になる。これを高次元版の微分積分学の基本定理、と言っておく ($\displaystyle\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$ の高次元化)。

3.2 Gauss の発散定理

ベクトル値関数 $\boldsymbol{f} := (f_1, \ldots, f_d)^\top$ が与えられたとき、(4) で、$u = f_j$ として、j について和を取ると、

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^d \frac{\partial f_j}{\partial x_j}\,dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^d f_j n_j\,d\sigma.$$

こうして有名な Gauss の発散定理を得る。

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{f}\,dx = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}\,d\sigma. \tag{5}$$

逆に $\boldsymbol{f} := u\boldsymbol{e}_j$ とすると、(4) が導かれる。その意味では、(4) と (5) は同値である。

3.3 Green の積分公式

スカラー値関数 u, v が与えられたとき、$\boldsymbol{f} := v\nabla u$ とおくと、$\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \nabla v \cdot \nabla u + v \triangle u$ (積の微分法) であるから、(5) は、

$$\int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla u + v \triangle u)\,dx = \int_{\partial\Omega} v\nabla u \cdot \boldsymbol{n}\,d\sigma.$$

これを移項して、$\nabla u \cdot \boldsymbol{n} = \dfrac{\partial u}{\partial n}$ に注意すると、次の Green の積分公式を得る。

$$\int_\Omega v \triangle u\,dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\,d\sigma - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx. \tag{6}$$

これが定理 2.2 の (1) であり、それからすぐに (2), (3) が導かれる。

3.4 ベクトル値関数版 Green の積分公式

繰り返しになるが、記号について注意しておく。$\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_d)^T$ に対して、

$$\triangle \boldsymbol{u} := \begin{pmatrix} \triangle u_1 \\ \vdots \\ \triangle u_d \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}} := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial n} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u_d}{\partial n} \end{pmatrix}, \quad \nabla \boldsymbol{u} := \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_d} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial u_d}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_d}{\partial x_d} \end{pmatrix},$$

また $P = (p_{ij})$, $Q = (q_{ij})$ に対して、

$$P : Q := \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} p_{ij} q_{ij}$$

とおく。

(6) の u, v として、u_j, v_j を取り、$j \in \{1, \dots, d\}$ について和を取ることで、次を得る。

$$\int_\Omega \triangle \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial n} \cdot \boldsymbol{v}\, d\sigma - \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v}\, dx. \tag{7}$$

私の講義では、ベクトル値関数版 Green の積分公式と呼ぶことにしておく。

3.5 なんと呼ぼうかな (ベクトル値関数版部分積分？)

与えられたスカラー値関数 f, g に対して、$u := fg$ とおくと、(4) は

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g\, dx = \int_{\partial\Omega} f g n_i\, d\sigma - \int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx$$

となる。私の講義では、部分積分の公式と呼んでいる (微積分の基本定理に、積の微分法の式を代入して得られる、という点で、ピッタリだと考えている)。

$g = g_i$ とおいて、和を取ると、($\boldsymbol{g} := (g_1, \dots, g_d)^T$ として)

$$\int_\Omega \nabla f \cdot \boldsymbol{g}\, dx = \int_{\partial\Omega} f \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma - \int_\Omega f \operatorname{div} \boldsymbol{g}\, dx. \tag{8}$$

これは特に名前がついていないようだが、案外と良く用いられる。私の講義では、ベクトル値関数版部分積分の公式と呼ぶことにしておく。

4 流体力学の有限要素法で役立つ補題

変形速度テンソル

$$E(\boldsymbol{u}) := \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)$$

についての次の積分公式が重要である。

命題 4.1

$$\int_\Omega E(\boldsymbol{u}) : E(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} E(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}\, d\sigma - \frac{1}{2} \int_\Omega [\triangle \boldsymbol{u} + \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u})] \cdot \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}. \tag{9}$$

証明

$$\int_\Omega E(\boldsymbol{u}):E(\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \sum_{i,j} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right)d\boldsymbol{x}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{i,j}\int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)d\boldsymbol{x} \qquad \text{(展開した)}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{i,j}\int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)d\boldsymbol{x} \qquad \left(\because \sum_{i,j}A_{ij}=\sum_{i,j}A_{ji}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)d\boldsymbol{x} \qquad \text{(ここから部分積分で } v \text{ の微分を } u \text{ によせる)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}v_i n_j+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}v_j n_i\right)d\sigma - \int_\Omega\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}v_i+\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_i}v_j\right)d\boldsymbol{x}\right)$$

$$= \sum_{i,j}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)v_i n_j d\sigma - \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}v_i+\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_i}v_j\right)d\boldsymbol{x} \qquad \left(\because \sum_{i,j}A_{ij}=\sum_{i,j}A_{ji}\right)$$

$$= \int_{\partial\Omega}\sum_i\left(\sum_j e_{ij}n_j\right)v_i d\sigma - \frac{1}{2}\int_\Omega\left(\sum_i\left(\sum_j\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\right)v_i+\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)v_j\right)d\boldsymbol{x}$$

$$= \int_{\partial\Omega}E(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\,d\sigma - \frac{1}{2}\int_\Omega(\triangle\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x}. \qquad \text{(証明終)}$$

すなわち

$$\int_\Omega E(\boldsymbol{u}):E(\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega}E(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\,d\sigma - \frac{1}{2}\int_\Omega[\triangle\boldsymbol{u}+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})]\cdot\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}.\blacksquare \tag{10}$$

参考文献

[1] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 2 部, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p2.pdf (内容はベクトル解析) (2006〜).

[2] 桂田祐史：微分方程式 2 講義ノート (旧「応用解析 II」), http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/pde/pde2013.pdf (1997 年〜).

[3] 菊地文雄：有限要素法の数理, 培風館 (1994), 版元在庫切れ状態です。読みたい学生は相談に来て下さい。

索 引