

# 応用数値解析特論 第 12 回

～Navier-Stokes 方程式に対する有限要素法 (3)～  
非定常 Navier-Stokes 方程式

かつらだ まさし  
桂田 祐史

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/ana2021/>

2021 年 12 月 13 日

# 目次

- 1 本日の講義内容、連絡事項
- 2 Navier-Stokes 方程式に対する有限要素解析
  - 非定常 Navier-Stokes 方程式
    - はじめに
    - 例題
    - 弱形式の準備
    - Lagrange-Galerkin 法とそれによる弱形式
    - FreeFem++ の `convevt()`
    - 流線を描くテクニック
- 3 Poiseuille 流
- 4 参考文献

# 本日の講義内容、連絡事項

非定常 Navier-Stokes 方程式を解いてみよう。

日本応用数学会のチュートリアル (2016) で公開された資料である、鈴木 [1] の “Time-dependent Navier-Stokes equations around a cylinder” とそのサンプル・プログラムを読んでみる。

<https://www.ljll.math.upmc.fr/~suzukia/FreeFempp-tutorial-JSIAM2016/>

このサイトに置いてある `example9 NS-cylinder.edp` を入手しよう。

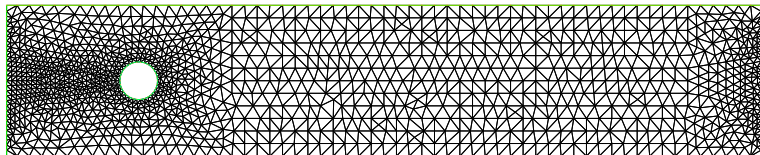
```
curl -O https://www.ljll.math.upmc.fr/~suzukia/FreeFempp-tutorial-JSIAM2016/EDP/NS-cylinder.edp
```

よくある円柱をよぎる一様流の問題である。

## 11.5.2 例題

問題を考える領域  $\Omega$  は、長方形領域から閉円盤を除いたものである。

$$\Omega = ((-1, 9) \times (-1, 1)) \setminus \{(x, y) \mid (x - 3/4)^2 + y^2 \leq 1/16\}.$$



$\Omega$  の境界を、以下の5つの部分に分ける (下、上、右、左、穴の縁)。

$$(1a) \quad \Gamma_1 = [-1, 9] \times \{-1\}, \quad \Gamma_3 = [-1, 9] \times \{1\},$$

$$(1b) \quad \Gamma_2 = \{9\} \times [-1, 1], \quad \Gamma_4 = \{-1\} \times [-1, 1],$$

$$(1c) \quad \omega = \{(x, y) \mid (x - 3/4)^2 + y^2 = 1/16\}.$$

## 11.5.2 例題

Navier-Stokes 方程式の以下の初期値境界値問題を考える。

$$(2a) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - 2\nu \nabla \cdot D(\mathbf{u}) + \nabla p = 0 \quad (\text{in } \Omega \times (0, \infty)),$$

$$(2b) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{in } \Omega \times (0, \infty)),$$

$$(2c) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{on } \omega \times (0, \infty)),$$

$$(2d) \quad \mathbf{u} = (1 - y^2, 0) \quad (\text{on } \Gamma_4 \times (0, \infty)),$$

$$(2e) \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \wedge (2\nu D(\mathbf{u})\mathbf{n} - p\mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (\text{on } (\Gamma_1 \cup \Gamma_3) \times (0, \infty)),$$

$$(2f) \quad 2\nu D(\mathbf{u})\mathbf{n} - p\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (\text{on } \Gamma_2 \times (0, \infty)),$$

$$(2g) \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \text{Stokes 方程式の解}$$

$\mathbf{u}: \bar{\Omega} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $p: \bar{\Omega} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  は未知関数である。

$\mathbf{n}$  と  $\mathbf{t}$  は、境界上の点における外向き単位法線ベクトル、単位接線ベクトルである。

$\nu$  は既知の正定数である (Reynolds 数の逆数)。

$D(\mathbf{u}) = \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)$  は歪テンソルである (前回までは  $E(\mathbf{u})$  と書いた)。

## 11.5.2 例題

$\nabla \cdot D(\mathbf{u})$  はその発散である (行毎にベクトル場の発散を並べたもの)。結局

$$\nabla \cdot D(\mathbf{u}) = \Delta \mathbf{u} + \text{grad div } \mathbf{u}$$

ということになり (説明済み)、(2a) は確かに Navier-Stokes 方程式である。  
境界条件の物理的な意味を復習しておく。

- (2c) は粘着境界条件 (no-slip boundary condition)
- (2d) は Dirichlet 境界条件 (ポアズィユ流 (付録参照) の値)
- (2e) は滑り境界条件 (slip boundary condition)
- (2f) は応力が 0 という条件 (outflow condition と呼ぶ人が多い)

記号の見栄えは異なるが、第 10 回講義スライド p. 6 の (1a)–(1e) で

$$\mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{g}_1(x, y) := \begin{cases} (1 - y^2, 0) & ((x, y) \in \Gamma_4) \\ (0, 0) & ((x, y) \in \omega), \end{cases} \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{0}$$

とした場合である。

初期条件は、対応する定常 Stokes 方程式の解  $\mathbf{u}_0$  とする (これは境界値問題を解いて求めている)。

## 11.5.3 弱形式の準備

弱形式の作り方は、第 10 回の講義と同じ議論を行う。

$\Gamma_4 \cup \omega$  で定義された  $\mathbf{g}$  に対して ( $\mathbf{g} = \mathbf{g}_1$ ,  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$  として用いる)

$$V(\mathbf{g}) := \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2 \mid \mathbf{v} = \mathbf{g} \text{ on } \Gamma_4 \cup \partial\omega, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \},$$
$$Q := L^2(\Omega).$$

弱形式 (作りかけ)

Find  $(\mathbf{u}(t), p(t)) \in V(\mathbf{g}_1) \times Q$  ( $t \in [0, \infty)$ ) s.t.

$$\left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt}(\mathbf{t}), \mathbf{v} \right) + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p(t)) = 0 \quad (\mathbf{v} \in V(\mathbf{0}), t > 0),$$

$$b(\mathbf{u}(t), q) = 0 \quad (q \in Q, t > 0),$$

$$\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0.$$

ただし

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := 2\nu \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \, dx, \quad b(\mathbf{v}, p) := - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx.$$

物質微分項  $\frac{D\mathbf{u}}{Dt}$  をどう扱うかが問題になる。



## 11.5.3 弱形式の準備

第10回の講義では、物質微分に由来する  $\left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt}(\mathbf{t}), \mathbf{v}\right)$  の扱いは述べなかった。

素朴に考えると、熱方程式のときのように、 $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$  を後退差分近似すること、すなわち  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t_n) \doteq \frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t}$  が思い浮かぶ。流速が非常に小さい場合は、この方法でもそれなりの結果が得られる。しかし、流速が大きくなると不安定性が生じてうまく行かない。それに対処するための方法がいくつか考えられている。

ここでは、FreeFem++ で比較の実装しやすい **Lagrange-Galerkin 法**を紹介する。

## 11.5.4 Lagrange-Galerkin 法とそれによる弱形式 背景と歴史

一般に、移流の効果がある現象のシミュレーションで、**安定性を向上させる**ために、<sup>かざかみ</sup>上流(風上)の情報を優先的に取り入れるという考え方がある。(これは有限要素法や流体力学の方程式に限定されるものではなく、差分法や移流拡散方程式などにも現れる。)

**特性曲線有限要素法**はその考え方に基づく方法で、**Lagrange-Galerkin 法**とも呼ばれる(物質微分のことを Lagrange 微分ともいうから?)。

1982 年に出版された Douglas-Russel [2], Pironneau [3] が世界的に有名であるが、日本では Tabata [4] 以来の田端スクールの研究がよく知られている(野津・田端 [5], Notsu-Tabata [6], Tabata-Uchiumi [7], 内海・田端 [8])。

理論的に安定に計算できる手順は知られているが、積分を厳密に計算する必要があり、FreeFem++ でそれを実行する効率的なプログラムを書くのは難しく(以前そういう課題を院生に与えたが、力及ばなかった)、いかげんな数値積分で実装した場合は、「十分小さな刻み幅を用いれば安定」(もちろん、もはや無条件安定とは言えない)となるようである。

## 11.5.4 Lagrange-Galerkin 法とそれによる弱形式 物質微分の近似

以下は、おおむね内海 [9] に従って説明する。特に難しいことをしているわけではないが、文献によっては、いい加減な記述で混乱した説明になっているものが珍しくない。きちんと書かれた [9] はありがたい(自力でやったものを照らし合わせられないと不安が残る)。

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $T > 0$ , そして流速場  $\mathbf{u}: \bar{\Omega} \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$  があるとする。

$s \in [0, T)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$  とする。 $X(\cdot; \mathbf{x}, s): [0, s] \rightarrow \Omega$  が、時刻  $s$  で  $\mathbf{x}$  を通る**特性曲線**であるとは、次式が成り立つことをいう。

$$\frac{dX}{dt}(t; \mathbf{x}, s) = \mathbf{u}(X(t; \mathbf{x}, s), t) \quad (0 \leq t < s), \quad X(s; \mathbf{x}, s) = \mathbf{x}$$

$X(t; \mathbf{x}, s)$  は、時刻  $s$  で  $\mathbf{x}$  にいる流体粒子の、 $t$  における位置を表す。

時刻を刻み幅  $\Delta t (> 0)$  で離散化する。すなわち

$$(3) \quad t^n := n\Delta t \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

における値  $\mathbf{u}^n(\mathbf{x}) := \mathbf{u}(\mathbf{x}, t^n)$ ,  $p^n(\mathbf{x}) := p(\mathbf{x}, t^n)$  を求めることを目標とする。

## 11.5.4 Lagrange-Galerkin 法とそれによる弱形式 物質微分の近似

$\phi: \bar{\Omega} \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  の物質微分  $\frac{D\phi}{Dt}$  が、流体粒子から見ると、単なる時間変化率であることは説明してある。それによると

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \right) (\mathbf{x}, t^n) &= \frac{d}{dt} \phi(X(t; \mathbf{x}, t^n), t) \Big|_{t=t^n} \\ &\doteq \frac{\phi(X(t^n; \mathbf{x}, t^n), t^n) - \phi(X(t^n - \Delta t; \mathbf{x}, t^n), t^n - \Delta t)}{\Delta t} \\ &= \frac{\phi(\mathbf{x}, t^n) - \phi(X(t^{n-1}; \mathbf{x}, t^n), t^{n-1})}{\Delta t}. \end{aligned}$$

すなわち

$$(4) \quad \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \right) (\mathbf{x}, t^n) \doteq \frac{\phi^n(\mathbf{x}) - \phi^{n-1}(X(t^{n-1}; \mathbf{x}, t^n))}{\Delta t}.$$

ただし  $\phi^n(\mathbf{x}) := \phi(\mathbf{x}, t^n)$  である。

## 11.5.4 Lagrange-Galerkin 法とそれによる弱形式 物質微分の近似

FreeFem++ のドキュメントや鈴木厚先生は、写像  $\mathbf{x} \mapsto X(t^{n-1}; \mathbf{x}, t^n)$  を  $X^{n-1}$  と表す記法を用いている。それを使うと

$$\phi^{n-1}(X(t^{n-1}; \mathbf{x}, t^n)) = \phi^{n-1}(X^{n-1}(\mathbf{x})) = \phi^{n-1} \circ X^{n-1}(\mathbf{x}).$$

ゆえに

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \right) (\mathbf{x}, t^n) \doteq \frac{\phi^n(\mathbf{x}) - \phi^{n-1}(X(t^{n-1}; \mathbf{x}, t^n))}{\Delta t} = \frac{\phi^n(\mathbf{x}) - \phi^{n-1} \circ X^{n-1}(\mathbf{x})}{\Delta t}.$$

個人的な意見

$X$  という文字を使い回しているのは、混乱を引き起こしかねないような気がする。私は、微分方程式の解は例えば  $\varphi(t; \mathbf{x}, t)$  と書いて

$$X^{n-1}(\mathbf{x}) := \varphi(t^{n-1}; \mathbf{x}, t^n)$$

としたい。

## 11.5.4 Lagrange-Galerkin 法とそれによる弱形式 弱形式

Navier-Stokes 方程式の弱形式に現れる  $(\frac{D\mathbf{u}}{Dt}, \mathbf{v})$  をこのやり方で差分近似する。

$$(5a) \quad \left( \frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1} \circ X^{n-1}}{\Delta t}, \mathbf{v} \right) + a(\mathbf{u}^n, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p^n) = 0 \quad (\mathbf{v} \in V(\mathbf{0})),$$

$$(5b) \quad b(\mathbf{u}^n, q) = 0 \quad (q \in Q).$$

…これが **Lagrange-Galerkin 法**である。

連立1次方程式の係数行列に、対流項  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  に由来するものが入らないため、行列は対称になる。これは数値計算には有効である。

安定性にも効果がある。移流拡散方程式に適用した場合に無条件安定であり、Navier-Stokes 方程式に適用した場合も  $\Delta t \leq Ch^{d/4}$  という形の安定性条件が成り立つ (Süli [10])。

$X(\cdot; \mathbf{x}, t^n)$  は常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dX}{dt}(t; \mathbf{x}, t^n) = \mathbf{u}(X(t; \mathbf{x}, t^n), t) \quad (0 \leq t < t^n), \quad X(t^n; \mathbf{x}, t^n) = \mathbf{x}$$

の解である。(4) の右辺に現れる  $X^{n-1}(\mathbf{x}) = X(t^{n-1}; \mathbf{x}, t^n)$  の厳密な値を計算するのは難しいが、近似値で良ければ Euler 法による次の値を使うことが考えられる。

$$(6) \quad X_*^{n-1}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} - \mathbf{u}^n(\mathbf{x})\Delta t.$$

すなわち

$$(7) \quad \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \right) (\mathbf{x}, t^n) \doteq \frac{\phi^n(\mathbf{x}) - \phi^{n-1}(X_*^{n-1}(\mathbf{x}))}{\Delta t}.$$

## 11.5.5 FreeFem++ の convect()

FreeFem++ には、 $\text{convect}([u_1, u_2], \Delta t, \phi)$  というオペレーターが用意されている。

$u_1, u_2, \phi$  はいずれもある有限要素空間  $V_h$  の要素であり、 $\Delta t \in \mathbb{R}$ ,  $\Delta t \neq 0$  である。

$\text{convect}([u_1, u_2], \Delta t, \phi)$  は  $\phi \circ X$  を返す。ここで  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  は以下のように定義される。

任意の  $\mathbf{x} \in \Omega$  について、微分方程式の初期値問題

$$\frac{d\xi(t)}{dt}(t) = \mathbf{u}(\xi(t)), \quad \xi(0) = \mathbf{x}$$

の解  $\xi$  (これは  $\mathbf{x}$  に依存するので、本来は  $\xi(\cdot; \mathbf{x})$  のように、 $\mathbf{x}$  を添えて表すべきかもしれない) を用いて

$$X(\mathbf{x}) = \xi(\Delta t)$$

と定める。(  $X$  はベクトル場  $\mathbf{u}$  の定める力学系において、時間  $\Delta t$  が経過した後の位置を対応させる写像である。 )

前項の  $\phi^{n-1} \circ X^{n-1}$  は、 $\text{convect}([u_1^n, u_2^n], -\Delta t, \phi^{n-1})$  とすれば計算できる。



## 11.5.6 流線を描くテクニック

ベクトル場  $\mathbf{u}$  が与えられたとき、常微分方程式を解くことで流線が描けるが、流れ関数が求まればその等高線として描くことができる。

次の定理が成り立つことはすぐ分かる。

[http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/AC06\\_0525\\_handout.pdf#page=13](http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/AC06_0525_handout.pdf#page=13)

### 命題 1

2次元領域  $\Omega$  における速度場  $\mathbf{u}$  について、次が成り立つ。

- ①  $\mathbf{u}$  の流れ関数が存在するならば、 $\mathbf{u}$  は非圧縮である。
- ②  $\mathbf{u}$  が非圧縮ならば、 $\Omega$  の任意の単連結部分領域で  $\mathbf{u}$  の流れ関数が存在する。
- ③  $\mathbf{u}$  の流れ関数  $\psi$  が存在するとき、 $\Delta\psi = -\operatorname{rot} \mathbf{u}$ . ( $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}$ .)

この問題は非圧縮流である。 $\Omega$  は穴が空いているので単連結ではないが、穴の縁  $\omega$  で  $\mathbf{u} = 0$  であるので、実は流れ関数  $\psi$  が存在する。実際、

$$\psi(\mathbf{x}) := \int_{\gamma_{\mathbf{x}}} (-u_2 dx + u_1 dy)$$

とすれば良い。ここで  $\gamma_{\mathbf{x}}$  は、定点  $\mathbf{a} = (-1, 0)$  から  $\mathbf{x}$  に至る曲線である。

## 11.5.6 流線を描くテクニック

$\int_{\omega} (-u_2 dx + u_1 dy) = 0$  であるから、 $\psi(\mathbf{x})$  が  $\gamma_{\mathbf{x}}$  の取り方によらずに定まる。

$\psi$  は Poisson 方程式の境界値問題として求めることができる (?)。

$$-\Delta\psi = \text{rot } \mathbf{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

$\Gamma_4$  での Dirichlet データが次のように求まる。

$$\psi(-1, y) = \int_0^y u_1 dy = \int_0^y (1 - y^2) dy = y - y^3.$$

$\Gamma_1, \Gamma_3$  での Dirichlet データが次のように求まる。

$$\psi(x, \pm 1) = \pm \frac{2}{3} + \int_{(-1, \pm 1) \rightarrow (x, \pm 1)} (-u_2) dx = \pm \frac{2}{3} + 0 = \pm \frac{2}{3}.$$

$\omega$  では  $\psi = 0$  と鈴木先生は書いているが…理解できない。((-1, 0) から (0, 0) までの水平線上で  $u_2 = 0$  として (なぜ?)、 $\psi(0, 0) = 0$  と結論している。) また  $\Gamma_2$  で  $\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -u_2 = 0$  としているが、これも根拠が良く分からない。

## 補足: Poiseuille 流

Poiseuille 流は、Hagen-Poiseuille 流, 管内流とも言う。  
空間内の円柱領域

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y^2 + z^2 < a^2\}$$

における定常 Navier-Stokes 方程式

$$(8) \quad \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\text{grad } p + \mu \Delta \mathbf{v} \quad (\text{in } \Omega),$$

$$(9) \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (\text{in } \Omega),$$

$$(10) \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

を考える。無限遠での境界条件の指定はしていないので、このままでは解が一意には定まらない。

一方向の流れ、つまり速度場  $\mathbf{v} = (u, v, w)$  が

$$(11) \quad v = w = 0, \quad \text{i.e.} \quad \mathbf{v} = (u, 0, 0)$$

となっている場合を考える。

非圧縮条件  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  は、

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

となるので、 $u = u(y, z)$  となる。

## 補足: Poiseuille 流

結局 Navier-Stokes 方程式中の非線型項  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = 0$  となる。実際  $(v = w = 0, \partial u / \partial x = 0$  であるので)

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

従って

$$\mathbf{0} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

成分表示すると

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} \Delta u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

すなわち

$$0 = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

## 補足: Poiseuille 流

後の二つの式から  $p = p(x)$ . 最初の式を移項した

$$-\nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

において、左辺は  $x$  に依らず、右辺は  $y, z$  に依らないので、結局は定数である。それを  $\alpha$  とおくと、

$$\nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = -\alpha, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\alpha.$$

後者を積分して

$$p(x) = p(0) - \rho\alpha x.$$

$p_0 := p(0)$  とおくと、

$$\nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = -\alpha, \quad p(x) = p_0 - \rho\alpha x.$$

## 補足: Poiseuille 流

流れが軸対称であることを仮定する。  $yz$  平面に極座標

$$y = r \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi$$

を導入すると、軸対称性により  $u = u(r)$  であるから、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right).$$

ゆえに

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = -\frac{\alpha}{\nu}.$$

これから、

$$u(r) = -\frac{\alpha}{4\nu} r^2 + A \log r + B.$$

ここで  $A, B$  は積分定数である。 $r = 0$  において  $u$  は有限でなければならないから  $A = 0$ 。また円柱の壁面  $r = a$  において、流速は 0 でなければならないから

$$0 = u(a) = -\frac{\alpha}{4\nu} a^2 + B.$$

## 補足: Poiseuille 流

ゆえに  $B = \frac{\alpha}{4\nu} a^2$ . これから

$$u(r) = \frac{\alpha}{4\nu} (a^2 - r^2).$$

流量は

$$Q = 2\pi \int_0^a ru(r) dr = \frac{\alpha}{8\nu} \pi a^4.$$

平均流速はこれを  $\pi a^2$  で割った

$$U_{\text{mean}} = \frac{\alpha}{8\nu} a^2.$$

Navier-Stokes 方程式で、非線型項 = 0 とおいて得られる Stokes 方程式の厳密解でもある。

2次元版として、平行版の間の領域  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -a < y < a\}$  における流れ、

$$u(x, y) = \frac{\alpha}{2\nu} (a^2 - y^2), \quad p(x) = -\rho\alpha x + p_0$$

が得られる。

- [1] Suzuki, A.: Finite element programming by FreeFem++ —intermediate course, 日本応用数理学会「産業における応用数理」研究部会のソフトウェアセミナー「FreeFem++ による有限要素プログラミング — 中級編 —」(2016/2/11-12) の配布資料で、<https://www.ljll.math.upmc.fr/~suzukia/FreeFempp-tutorial-JSIAM2016/> から入手できる (2016).
- [2] Douglas, J. and Russell, T.: Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 19, No. 5, pp. 871–885 (1982).
- [3] Pironneau, O.: On the Transport-Diffusion Algorithm and Its Applications to the Navier-Stokes Equations, *Numerische Mathematik*, Vol. 38, No. ?, pp. 309–332 (1982).



- [4] Tabata, M.: A finite element approximation corresponding to the upwind finite differencing, *Memoirs of Numerical Mathematics*, Vol. 4, pp. 47–63 (1977), 私はコピーを持っていない。東大数理の図書室にある。
- [5] 野津裕史, 田端正久: Navier-Stokes 方程式のための圧力安定化・特性曲線法結合有限要素スキーム, 日本応用数学会論文誌, Vol. 18, No. 3, pp. 427–445 (2008).
- [6] Notsu, H. and Tabata, M.: A single-step characteristic-curve finite element scheme of second order in time for the incompressible Navier-Stokes equations, *Journal of Scientific Computing*, Vol. 38, No. 1, pp. 1–14 (2009).

- [7] Tabata, M. and Uchiumi, S.: An Exactly Computable Lagrange-Galerkin Scheme for the Navier-Stokes Equations and its Error Estimates, *Mathematics of Computation*, Vol. 87, No. 309, pp. 39–67 (January 2018).
- [8] 内海晋弥, 田端正久: 数値積分を用いる Lagrange-Galerkin スキームの収束性, 日本応用数理学会 2018 年 年会 講演予稿集 (2018.9.3-5, 名古屋) (2018).
- [9] Shinya UCHIUMI(内海晋弥): Lagrange-Galerkin schemes with a locally linearized velocity for the flow problems, 早稲田大学大学院の博士論文? (February 2017).
- [10] Süli, E.: Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method for the Navier-Stokes equations, *Numerische Mathematik*, Vol. 53, No. 4, pp. 459–483 (1988).