応用数値解析特論 第9回
〜発展問題 (2), 流体力学の方程式 (1)〜

かつらだ まさし
桂田 祐史
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/ana2021/

2021年11月22日

目次

本日の講義内容、連絡事項、レポート課題)

本日の講義内容、連絡事項、レポート課題)

- 発展系の続き。波動方程式を解くプログラムを紹介します。

本日の講義内容、連絡事項、レポート課題)

- 発展系の続き。波動方程式を解くプログラムを紹介します。
- 流体力学の方程式の手短な紹介をします。— これからこの講義の終わりまで、流体の挙動を表す偏微分方程式に対する有限要素法について解説します。問題が応用上重要であること以外に、これまでに説明した Poisson 方程式に対する有限要素法とは大きく異なること (最小型変分原理ではなく鞍点型変分原理が成り立つ、ベクトル値関数を未知関数とする、P1 要素では不十分、⋯) が取り上げる理由です。

本日の講義内容、連絡事項、レポート課題)

- 発展系の続き。波動方程式を解くプログラムを紹介します。
- 流体力学の方程式の手短な紹介をします。— これからこの講義の終わりまで、流体の挙動を表す偏微分方程式に対する有限要素法について解説します。問題が応用上重要であること以外に、これまでに説明した Poisson 方程式に対する有限要素法とは大きく異なること (最小型変分原理ではなく鞍点型変分原理が成り立つ、ベクトル値関数を未知関数とする、P1 要素では不十分、…) が取り上げる理由です。
- 2 つのレポート課題を出します。

レポート課題 A 前回スライドに掲載した実習課題 についてレポートせよ。〆切は 12 月 17 日 (金曜) 23:00、形式は PDF (プログラム等を付録として提出する場合は、別ファイルにしても良い) 、提出は Oh-o! Meiji で行う。本文 PDF だけ読めば内容が分かるようにすること。また数値実験が再現可能な情報を含めること。この課題については〆切後に簡単な解説を行う。

レポート課題 B 有限要素法や変分法に関する自由課題。数学的な分析と数値実験の少なくともどちらかがあること。例えば、自分が興味ある現象の数理モデルについて説明して、それを有限要素法によってシミュレーションして得た結果を分析する、という内容で良い。〆切は 2022 年 1 月 14 日 (金曜) 18:00. 形式や提出方法は課題 A と同じ。(講義の進捗状況にもよるが、授業最終日に説明してもらう可能性がある。) 〆切は一ヶ月以上先だが、冬季休暇をはさむので、なるべくその前に見通しを立てて、質問も冬季休暇前に行うこと (一応 1 月 11 日に質問 Zoom ミーティングはある)。大きな勘違いがある場合は再提出を要求する場合がある。

8.3 波動方程式の初期値境界値問題　8.3.1 例題と弱形式

波動方程式の初期値境界値問題を解くプログラムを作ってみよう。

(1a) $$\frac{1}{c^2} u_{tt} = \triangle u \quad ((x,y,t) \in \Omega \times (0,\infty)),$$

(1b) $$u(x,y,t) = 0 \quad ((x,y,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty)),$$

(1c) $$u(x,y,0) = \phi(x,y), \quad u_t(x,y,0) = \psi(x,y) \quad ((x,y) \in \overline{\Omega}).$$

$u^n = u(\cdot, t_n)$ として

(2) $$\left(\frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2}, v\right) = c^2 \langle u^n, v\rangle \quad (v \in \hat{X}).$$

波動方程式の初期値境界値問題を解くプログラムを作ってみよう。

(1a) $$\frac{1}{c^2}u_{tt} = \triangle u \quad ((x,y,t)\in\Omega\times(0,\infty)),$$

(1b) $$u(x,y,t) = 0 \quad ((x,y,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty)),$$

(1c) $$u(x,y,0) = \phi(x,y), \quad u_t(x,y,0) = \psi(x,y) \quad ((x,y)\in\overline{\Omega}).$$

$u^n = u(\cdot, t_n)$ として

(2) $$\left(\frac{u^{n+1}-2u^n+u^{n-1}}{\Delta t^2}, v\right) = c^2\langle u^n, v\rangle \quad (v\in\hat{X}).$$

u^1 については、複数のやり方が考えられる。

1. Taylor 展開で 1 次近似 (以下のサンプル・プログラムで採用)
$$u(x,y,\Delta t) \fallingdotseq u(x,y,0) + u_t(x,y,0)\Delta t = \phi(x,y) + \psi(x,y)\Delta t.$$

波動方程式の初期値境界値問題を解くプログラムを作ってみよう。

(1a) $$\frac{1}{c^2}u_{tt} = \triangle u \quad ((x,y,t) \in \Omega \times (0,\infty)),$$

(1b) $$u(x,y,t) = 0 \quad ((x,y,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty)),$$

(1c) $$u(x,y,0) = \phi(x,y), \quad u_t(x,y,0) = \psi(x,y) \quad ((x,y) \in \overline{\Omega}).$$

$u^n = u(\cdot, t_n)$ として

(2) $$\left(\frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2}, v\right) = c^2\langle u^n, v\rangle \quad (v \in \hat{X}).$$

u^1 については、複数のやり方が考えられる。

1. Taylor 展開で 1 次近似 (以下のサンプル・プログラムで採用)
$$u(x,y,\Delta t) \fallingdotseq u(x,y,0) + u_t(x,y,0)\Delta t = \phi(x,y) + \psi(x,y)\Delta t.$$
2. Taylor 展開で 2 次近似
$$\begin{aligned} u(x,y,\Delta t) &\fallingdotseq u(x,y,0) + u_t(x,y,0)\Delta t + \frac{u_{tt}(x,y,0)}{2}\Delta t^2 \\ &= u(x,y,0) + u_t(x,y,0)\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}\cdot c^2\triangle u(x,y,0) \\ &= \phi(x,y) + \psi(x,y)\Delta t + \frac{(c\Delta t)^2}{2}\triangle\phi(x,y). \end{aligned}$$

8.3.2 太鼓の振動のプログラム

サンプル・プログラムを用意してある。円盤領域における同次 Dirichlet 境界条件なので、太鼓の膜の振動現象のモデルと解釈できる (理想化した場合は厳密解が Bessel 関数で表示出来る)。

8.3.2 太鼓の振動のプログラム

サンプル・プログラムを用意してある。円盤領域における同次 Dirichlet 境界条件なので、太鼓の膜の振動現象のモデルと解釈できる (理想化した場合は厳密解が Bessel 関数で表示出来る)。

ターミナルでこうして入手

```
curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/program/fem/taiko.edp
```

8.3.2 太鼓の振動のプログラム

サンプル・プログラムを用意してある。円盤領域における同次 Dirichlet 境界条件なので、太鼓の膜の振動現象のモデルと解釈できる (理想化した場合は厳密解が Bessel 関数で表示出来る)。

ターミナルでこうして入手

```
curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/program/fem/taiko.edp
```

`plot()` で $\boxed{\texttt{,dim=3}}$ とした場合、描画範囲どうやって指定するかが分からず、苦し紛れに定数関数 (`top`, `bottom`) を描くようにしている。誰か解決策を見つけた人、教えて下さい。

8.3.2 太鼓の振動のプログラム

```
// taiko.edp
border Gamma(t=0,2*pi) { x=cos(t); y=sin(t); }
mesh Th=buildmesh(Gamma(40));
plot(Th,wait=true);
fespace Vh(Th,P1);
Vh newu,u,oldu,v,top,bottom;
func phi=1-x^2-y^2; func psi=0;
func topv=1.2; func bottomv=-1.2;
top=topv; bottom=bottomv;
real tau=0.01,Tmax=10;
real [int] levels =-1.5:0.1:1.5;
u=phi;
newu=u+tau*psi;
problem wave(newu,v)=
  int2d(Th)(newu*v)+int2d(Th)(-2*u*v+oldu*v+tau^2*(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v)))
 +on(Gamma,newu=0);
for (real t=0; t<Tmax; t+=tau) {
    oldu = u;
    u = newu;
    wave;
    plot(top,bottom,u,dim=3,value=1,fill=0,viso=levels,wait=0);
}
plot(top,bottom,u,dim=3,value=1,fill=0,viso=levels,wait=1);
```

10 流体力学に現れる方程式

今回は、流体力学に現れる有名な方程式をざっと紹介する。

10 流体力学に現れる方程式

今回は、流体力学に現れる有名な方程式をざっと紹介する。

ここでは「なぜそうなるか」については省いた、端折った説明をする。

10 流体力学に現れる方程式

今回は、流体力学に現れる有名な方程式をざっと紹介する。

ここでは「なぜそうなるか」については省いた、端折った説明をする。

学部で開講している「応用複素関数」では時間に余裕があり、部分的に少し詳しめに講義できているので、必要に応じてそちらの資料を見て下さい (参考書紹介などもそちらの方を見て下さい)。

- 講義のためのノート
  「複素関数と流体力学」
  `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/intro-fluid.pdf`
- 2021 年度第 5 回講義スライド PDF
  `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2-2021/AC05_0518.pdf`
  PDF ファイル名 AC05_0518.pdf のところを mp4/AC05_x.mp4 ($x = 1, 2, \cdots, 7$) に置き換えると、動画資料の URL になる。全部視聴すると 72 分。

流体 (fluid) とは、液体や気体のような “流れるもの” を理想化したものである (Cf. 質点, 剛体, 弾性体)。

10.1 基本的な用語

10.1.1 流体, 速度, 圧力, 密度

流体 (fluid) とは、液体や気体のような “流れるもの” を理想化したものである (Cf. 質点, 剛体, 弾性体)。

速度、圧力、密度、温度については、一応知っていることとする (実は圧力は意外と難しい)。どういう文字で表すか述べ、単位は何か確認しておく。

流体 (fluid) とは、液体や気体のような “流れるもの” を理想化したものである (Cf. 質点, 剛体, 弾性体)。

速度、圧力、密度、温度については、一応知っていることとする (実は圧力は意外と難しい)。どういう文字で表すか述べ、単位は何か確認しておく。

時刻 t, 位置 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ (または $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^\top$) における流体の**速度**を $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ と表す ($\boldsymbol{v}$ と書く場合もある)。$\boldsymbol{u}$ の成分を $(u_1, u_2, u_3)^\top$ あるいは $(u, v, w)^\top$ と表す。SI 単位系では、各成分の単位は $\mathrm{m/s^2}$ である。

10.1 基本的な用語

10.1.1 流体, 速度, 圧力, 密度

流体 (fluid) とは、液体や気体のような "流れるもの" を理想化したものである (Cf. 質点, 剛体, 弾性体)。

速度、圧力、密度、温度については、一応知っていることとする (実は圧力は意外と難しい)。どういう文字で表すか述べ、単位は何か確認しておく。

時刻 t, 位置 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ (または $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^\top$) における流体の**速度**を $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ と表す ($\boldsymbol{v}$ と書く場合もある)。$\boldsymbol{u}$ の成分を $(u_1, u_2, u_3)^\top$ あるいは $(u, v, w)^\top$ と表す。SI 単位系では、各成分の単位は $\mathrm{m/s^2}$ である。

時刻 t, 位置 $\boldsymbol{x}$ における流体の**圧力**を $p(\boldsymbol{x}, t)$ という記号で表す。SI 単位系では、単位は $\mathrm{Pa} = \mathrm{N/m^2}$ である (Pa は「パスカル」と読む)。

1 気圧は $1013\ \mathrm{hPa} = 1.013 \times 10^5\ \mathrm{Pa}$. 水に 10m 潜ったときの水圧は
$1.0 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 9.8\ \mathrm{m/s^2} \cdot 10\ \mathrm{m} = 9.8 \times 10^4\ \mathrm{Pa} \fallingdotseq 10^5\ \mathrm{Pa} \fallingdotseq 1$ 気圧.

10.1 基本的な用語

10.1.1 流体, 速度, 圧力, 密度

流体 (fluid) とは、液体や気体のような "流れるもの" を理想化したものである (Cf. 質点, 剛体, 弾性体)。

速度、圧力、密度、温度については、一応知っていることとする (実は圧力は意外と難しい)。どういう文字で表すか述べ、単位は何か確認しておく。

時刻 t, 位置 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ (または $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^\top$) における流体の**速度**を $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ と表す ($\boldsymbol{v}$ と書く場合もある)。$\boldsymbol{u}$ の成分を $(u_1, u_2, u_3)^\top$ あるいは $(u, v, w)^\top$ と表す。SI 単位系では、各成分の単位は $\mathrm{m/s^2}$ である。

時刻 t, 位置 $\boldsymbol{x}$ における流体の**圧力**を $p(\boldsymbol{x}, t)$ という記号で表す。SI 単位系では、単位は $\mathrm{Pa} = \mathrm{N/m^2}$ である (Pa は「パスカル」と読む)。

1 気圧は $1013\,\mathrm{hPa} = 1.013 \times 10^5\ \mathrm{Pa}$. 水に 10m 潜ったときの水圧は
$1.0 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 9.8\ \mathrm{m/s^2} \cdot 10\ \mathrm{m} = 9.8 \times 10^4\ \mathrm{Pa} \fallingdotseq 10^5\ \mathrm{Pa} \fallingdotseq 1$ 気圧.

流体の**密度**は $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ で表す。$\rho > 0$ である。SI 単位系では、単位は $\mathrm{kg/m^3}$ である。
$0^\circ\mathrm{C}$ では、水の密度は $1 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, 空気の密度は $1.3\ \mathrm{kg/m^3}$.

10.1 基本的な用語

10.1.1 流体, 速度, 圧力, 密度

流体 (fluid) とは、液体や気体のような “流れるもの” を理想化したものである (Cf. 質点, 剛体, 弾性体)。

速度、圧力、密度、温度については、一応知っていることとする (実は圧力は意外と難しい)。どういう文字で表すか述べ、単位は何か確認しておく。

時刻 t, 位置 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ (または $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^\top$) における流体の**速度**を $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ と表す ($\boldsymbol{v}$ と書く場合もある)。$\boldsymbol{u}$ の成分を $(u_1, u_2, u_3)^\top$ あるいは $(u, v, w)^\top$ と表す。SI 単位系では、各成分の単位は $\mathrm{m/s^2}$ である。

時刻 t, 位置 $\boldsymbol{x}$ における流体の**圧力**を $p(\boldsymbol{x}, t)$ という記号で表す。SI 単位系では、単位は $\mathrm{Pa} = \mathrm{N/m^2}$ である (Pa は「パスカル」と読む)。

1 気圧は $1013\ \mathrm{hPa} = 1.013 \times 10^5\ \mathrm{Pa}$. 水に 10m 潜ったときの水圧は
$1.0 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 9.8\ \mathrm{m/s^2} \cdot 10\ \mathrm{m} = 9.8 \times 10^4\ \mathrm{Pa} \fallingdotseq 10^5\ \mathrm{Pa} \fallingdotseq 1$ 気圧.

流体の**密度**は $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ で表す。$\rho > 0$ である。SI 単位系では、単位は $\mathrm{kg/m^3}$ である。
$0^\circ\mathrm{C}$ では、水の密度は $1 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, 空気の密度は $1.3\ \mathrm{kg/m^3}$.

流体の**温度**を $\theta(\boldsymbol{x}, t)$ (あるいは $T(\boldsymbol{x}, t)$) で表す。SI 単位系では、単位は絶対温度 K (「ケルビン」と読む) であり、$\theta \geq 0$ が成り立つ。
各時刻 t において、$\boldsymbol{u}(\cdot, t)$ はベクトル場、$p(\cdot, t)$, $\rho(\cdot, t)$, $\theta(\cdot, t)$ はスカラー場である。

10.1.2 ベクトル解析の記号・公式

このスライドでは、p は一般のスカラー場、$\boldsymbol{u}$ は一般のベクトル場とする。

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad \nabla p = \operatorname{grad} p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} \end{pmatrix},$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \nabla \times \boldsymbol{u} = \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

$$\triangle p = \nabla^2 p := \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}, \quad \triangle \boldsymbol{u} = \nabla^2 \boldsymbol{u} := \begin{pmatrix} \triangle u_1 \\ \triangle u_2 \\ \triangle u_3 \end{pmatrix}.$$

なお流体分野の人は $\nabla \boldsymbol{u} := (\nabla u_1\ \nabla u_2\ \nabla u_3)$ という記法を使うことがある (例えば $E = \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^\top\right)$ のような式を書く)。次式が成り立つことに注意。

$$(\nabla \boldsymbol{u})^\top = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}' \quad (\boldsymbol{u} \text{ のヤコビ行列}).$$

10.1.2 ベクトル解析の記号・公式

$P = (p_{ij})$, $Q = (q_{ij})$ に対して $P : Q$ を次式で定める。

$$P : Q := \sum_{i,j=1}^{3} p_{ij} q_{ij}.$$

以下の公式は良く知られている。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, p) = \triangle p, \\
&\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, p) = \mathbf{0}, \\
&\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}) = 0, \\
&\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}) - \triangle \boldsymbol{u}.
\end{aligned}$$

10.2 物質微分 $\frac{D}{Dt}$

(流体があり、流速場 $\boldsymbol{u}$ が与えられているとする。)

時間依存するスカラー場 f に対し、**物質微分** (material derivative, **Lagrange 微分**) とは、

$$\frac{Df}{Dt} := \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla f = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{3}$$

で定義される。

10.2 物質微分 $\frac{D}{Dt}$

(流体があり、流速場 $\boldsymbol{u}$ が与えられているとする。)

時間依存するスカラー場 f に対し、**物質微分** (material derivative, **Lagrange 微分**) とは、

$$\frac{Df}{Dt} := \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{3}$$

で定義される。流体の流れに沿って運動する粒子 $\boldsymbol{x}(t)$ (つまり $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}(t), t)$) に対し

$$\left.\frac{d}{dt} f(\boldsymbol{x}(t), t)\right|_{t=t_0} = \frac{Df}{Dt}(\boldsymbol{x}(t_0), t_0)$$

が成り立つ (合成関数の微分法により証明出来る)。

10.2 物質微分 $\frac{D}{Dt}$

(流体があり、流速場 $\boldsymbol{u}$ が与えられているとする。)
　時間依存するスカラー場 f に対し、**物質微分** (material derivative, **Lagrange 微分**) とは、

(3)
$$\frac{Df}{Dt} := \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla f = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

で定義される。流体の流れに沿って運動する粒子 $\boldsymbol{x}(t)$ (つまり $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}(t), t)$) に対し

$$\left.\frac{d}{dt} f(\boldsymbol{x}(t), t)\right|_{t=t_0} = \frac{Df}{Dt}(\boldsymbol{x}(t_0), t_0)$$

が成り立つ (合成関数の微分法により証明出来る)。すなわち

流体の流れに沿って運動する粒子から場 f を観測すると、時間変化率は $\frac{Df}{Dt}$

10.2 物質微分 $\frac{D}{Dt}$

(流体があり、流速場 $\boldsymbol{u}$ が与えられているとする。)

時間依存するスカラー場 f に対し、**物質微分** (material derivative, **Lagrange 微分**) とは、

$$\frac{Df}{Dt} := \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla f = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{3}$$

で定義される。流体の流れに沿って運動する粒子 $\boldsymbol{x}(t)$ (つまり $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}(t), t)$) に対し

$$\left.\frac{d}{dt} f(\boldsymbol{x}(t), t)\right|_{t=t_0} = \frac{Df}{Dt}(\boldsymbol{x}(t_0), t_0)$$

が成り立つ (合成関数の微分法により証明出来る)。すなわち

流体の流れに沿って運動する粒子から場 f を観測すると、時間変化率は $\frac{Df}{Dt}$

ベクトル場 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ に対しても次のように定める。

$$\frac{D\boldsymbol{f}}{Dt} := \begin{pmatrix} \frac{Df_1}{Dt} \\ \frac{Df_2}{Dt} \\ \frac{Df_3}{Dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla f_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla f_2 \\ \frac{\partial f_3}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla f_3 \end{pmatrix}.$$

10.2 物質微分 $\frac{D}{Dt}$

(流体があり、流速場 $\boldsymbol{u}$ が与えられているとする。)

時間依存するスカラー場 f に対し、**物質微分** (material derivative, **Lagrange 微分**) とは、

$$\frac{Df}{Dt} := \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla f = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{3}$$

で定義される。流体の流れに沿って運動する粒子 $\boldsymbol{x}(t)$ (つまり $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}(t), t)$) に対し

$$\left.\frac{d}{dt} f(\boldsymbol{x}(t), t)\right|_{t=t_0} = \frac{Df}{Dt}(\boldsymbol{x}(t_0), t_0)$$

が成り立つ (合成関数の微分法により証明出来る)。すなわち

流体の流れに沿って運動する粒子から場 f を観測すると、時間変化率は $\frac{Df}{Dt}$

ベクトル場 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ に対しても次のように定める。

$$\frac{D\boldsymbol{f}}{Dt} := \begin{pmatrix} \frac{Df_1}{Dt} \\ \frac{Df_2}{Dt} \\ \frac{Df_3}{Dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla f_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla f_2 \\ \frac{\partial f_3}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla f_3 \end{pmatrix}.$$

特に $\boldsymbol{f}$ が流体の速度場 $\boldsymbol{u}$ であるとき、$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}$ は流体粒子の加速度である。

10.3 連続の方程式と非圧縮条件

質量が保存されるという仮定をすると

(4) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \boldsymbol{u}) = 0.$$

これを**連続の方程式** (the continuity equation, the equation of continuity) と呼ぶ。

10.3 連続の方程式と非圧縮条件

質量が保存されるという仮定をすると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0. \tag{4}$$

これを**連続の方程式** (the continuity equation, the equation of continuity) と呼ぶ。

積の微分法 $\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = \operatorname{grad}\rho \cdot \boldsymbol{u} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{u}$ により、(4) は

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \tag{5}$$

と書き直せる。

10.3 連続の方程式と非圧縮条件

質量が保存されるという仮定をすると

(4) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0.$$

これを**連続の方程式** (the continuity equation, the equation of continuity) と呼ぶ。

積の微分法 $\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = \operatorname{grad}\rho \cdot \boldsymbol{u} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{u}$ により、(4) は

(5) $$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$$

と書き直せる。

$\dfrac{D\rho}{Dt} = 0$ を満たすとき、その流体は**非圧縮** (incompressible) であるという。この条件は

(6) $$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$$

と同値であるが、こちらは**非圧縮条件** (incompressibility condition) と普通呼ばれる。

(**注** ρ が定数ならば非圧縮であるが、非圧縮であっても ρ が定数であるとは限らない。)

10.4 応力

流体がモノ (流体自身も含む) に “接触している” とき、流体はモノに力を及ぼす。狭い範囲で考えたとき、力は接触面の面積に (おおむね) 比例する。このことを流体が及ぼす力は**面積力** (surface force) であるという。

10.4 応力

流体がモノ (流体自身も含む) に "接触している" とき、流体はモノに力を及ぼす。狭い範囲で考えたとき、力は接触面の面積に (おおむね) 比例する。このことを流体が及ぼす力は**面積力** (surface force) であるという。

これに対して、重力のような、力が体積に比例する力を**体積力** (body force) という。

10.4 応力

流体がモノ (流体自身も含む) に “接触している” とき、流体はモノに力を及ぼす。狭い範囲で考えたとき、力は接触面の面積に (おおむね) 比例する。このことを流体が及ぼす力は**面積力** (surface force) であるという。

これに対して、重力のような、力が体積に比例する力を**体積力** (body force) という。

面積力の場合、単位面積当たりの力を**応力** (**stress**) と呼ぶ。これはベクトルであり、各成分の単位は SI 単位系では Pa (パスカル) である。

10.4 応力

流体がモノ (流体自身も含む) に "接触している" とき、流体はモノに力を及ぼす。狭い範囲で考えたとき、力は接触面の面積に (おおむね) 比例する。このことを流体が及ぼす力は**面積力** (surface force) であるという。

これに対して、重力のような、力が体積に比例する力を**体積力** (body force) という。

面積力の場合、単位面積当たりの力を**応力** (**stress**) と呼ぶ。これはベクトルであり、各成分の単位は SI 単位系では Pa (パスカル) である。

応力は接触面の向きに依存する。接触面の単位法線ベクトルが $\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}$ の指す側に流体があり、その反対側にモノがある) であるモノに流体が及ぼす応力を $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$ と書いて議論する。

10.4.0 応力テンソル

面 $x_i = a_i$ における応力を $\begin{pmatrix} \sigma_{i1} \\ \sigma_{i2} \\ \sigma_{i3} \end{pmatrix}$ とするとき

$$\sigma := (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{7}$$

とおき、σ を (Cauchy の) **応力テンソル** (the Cauchy stress tensor) と呼ぶ。

一般に応力テンソルは対称テンソル ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) である (角運動量保存から導かれる)。

また一般に

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = \sigma \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 \\ \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

が成り立つ。これは **Cauchy の (公) 式**と呼ばれる (あるいは定理として Cauchy's stress theorem)。

10.5 運動方程式

応力テンソルを用いると、運動方程式は次のように一般的に書ける:

(9)
$$\rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \operatorname{div} \sigma.$$

ただし

(10)
$$\operatorname{div} \sigma := \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{行毎の div}).$$

(証明には、Gauss の発散定理を用いる。)

10.6 歪み速度テンソル

次式で定義される E を**歪み速度テンソル** (**歪テンソル**, strain-rate tensor, rate-of-strain tensor) と呼ぶ:

$$E = E(\boldsymbol{x}) := (e_{ij}), \quad e_{ij} = e_{ij}(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{11}$$

(流体の速度場 $\boldsymbol{u}$ の歪み速度テンソルというのか？)

$I := (\delta_{ij})$ とおき、I を**単位テンソル**と呼ぶ。

10.7 Stokes の流体公理, Newton 流体

Stokes (1819–1903) は、流体についての仮定を整理して **Stokes の流体公理**にまとめた (一様、等方、$E=0$ のときき $P=-pI$ 等々)。それから次式が導かれる。

$$\sigma = \alpha I + \beta E + \gamma E^2. \tag{12}$$

10.7 Stokes の流体公理, Newton 流体

Stokes (1819–1903) は、流体についての仮定を整理して **Stokes の流体公理**にまとめた (一様、等方、$E=0$ のとき $P=-pI$ 等々)。それから次式が導かれる。

$$\sigma = \alpha I + \beta E + \gamma E^2. \tag{12}$$

さらに **Newton 流体**の仮定 (σ は E の 1 次式) をおくと

$$\sigma = (-p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{u}) I + 2\mu E \tag{13}$$

を得る (岡本・中村 [1] の定理 10.11)。ここで λ, μ は非負定数、$p = p(\boldsymbol{x}, t)$ はスカラー関数である。

10.7 Stokes の流体公理, Newton 流体

Stokes (1819–1903) は、流体についての仮定を整理して **Stokes の流体公理**にまとめた (一様、等方、$E=0$ のとき $P=-pI$ 等々)。それから次式が導かれる。

(12) $$\sigma = \alpha I + \beta E + \gamma E^2.$$

さらに **Newton 流体**の仮定 (σ は E の 1 次式) をおくと

(13) $$\sigma = (-p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{u}) I + 2\mu E$$

を得る (岡本・中村 [1] の定理 10.11)。ここで λ, μ は非負定数、$p = p(\boldsymbol{x}, t)$ はスカラー関数である。

特に非圧縮な Newton 流体では次式が成り立つ。

(14) $$\sigma = -pI + 2\mu E.$$

μ は**粘性率** (粘性係数, 粘度, viscosity), $p = p(\boldsymbol{x}, t)$ は**圧力** (pressure) と呼ばれる。

10.7 Stokes の流体公理, Newton 流体

Stokes (1819–1903) は、流体についての仮定を整理して **Stokes の流体公理**にまとめた (一様、等方、$E=0$ のとき $P=-pI$ 等々)。それから次式が導かれる。

(12) $$\sigma=\alpha I+\beta E+\gamma E^2.$$

さらに **Newton 流体**の仮定 (σ は E の 1 次式) をおくと

(13) $$\sigma=(-p+\lambda\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})I+2\mu E$$

を得る (岡本・中村 [1] の定理 10.11)。ここで λ, μ は非負定数、$p=p(\boldsymbol{x},t)$ はスカラー関数である。

特に非圧縮な Newton 流体では次式が成り立つ。

(14) $$\sigma=-pI+2\mu E.$$

μ は**粘性率** (粘性係数, 粘度, viscosity), $p=p(\boldsymbol{x},t)$ は**圧力** (pressure) と呼ばれる。

(独白) 最近は $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=0$ を仮定しない、圧縮性流体の研究が盛んになってきた。私は門外漢なので、λ, μ をどう呼び分けるとか、今一つ良く分かっていない。(弾性論だと、それぞれ Lamé の第 1 定数, 第 2 定数 (剛性率) というけれど。)

10.8 粘性率, 完全流体 (非粘性流体), 粘性流体

粘性率を表すのに η という文字を使うこともある。

一般に $\mu \geq 0$ である。$\mu = 0$ である流体を**完全流体** (perfect fluid)、あるいは**非粘性流体** (inviscid fluid) と呼び、$\mu > 0$ である流体を**粘性流体** (viscous fluid) と呼ぶ [1]。

[1] 発音をまとめておく: viscosity [viskásəti/viskɔ́ːsəti], inviscid [invísəd], viscous [vískəs]

10.8 粘性率, 完全流体 (非粘性流体), 粘性流体

粘性率を表すのに η という文字を使うこともある。

一般に $\mu \geq 0$ である。$\mu = 0$ である流体を**完全流体** (perfect fluid)、あるいは**非粘性流体** (inviscid fluid) と呼び、$\mu > 0$ である流体を**粘性流体** (viscous fluid) と呼ぶ [1]。

ν を

$$\nu := \frac{\mu}{\rho} \tag{15}$$

で定め、**動粘性係数** (動粘性率, 動粘度, kinematic viscosity) と呼ぶ。

[1] 発音をまとめておく: viscosity [viskásəti/viskɔ́ːsəti], inviscid [invísəd], viscous [vískəs]

SI 単位系では、粘性率と動粘性率の単位はそれぞれ $\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$, m^2/s.

- 20°C の場合、水と空気の粘性係数、動粘性係数は次の表の通りである。動粘性率については、空気は水の 10 倍程度の値を取る。

	粘性率	動粘性率
水	1.016×10^{-3}	1.004×10^{-6}
空気	1.83×10^{-5}	1.501×10^{-5}

- サラダ油の粘性係数は、水の粘性係数の 60 ∼ 80 倍程度である。
- 水の粘性率の温度依存性を図 1 に示す。

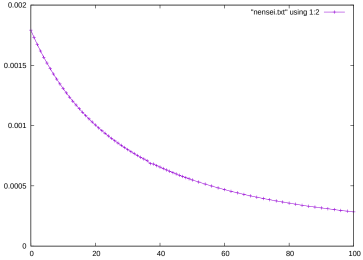

図 1: 水の粘性率の温度依存性

縦軸は粘性率 (単位は $\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$), 横軸は温度 (単位は摂氏)

10.10 Navier-Stokes 方程式, Stokes 方程式, Euler 方程式

運動方程式 (9) に、非圧縮 Newton 流体の応力テンソルの式 (14) を代入すると

(16) $$\rho\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}=-\operatorname{grad}\boldsymbol{p}+\mu\left(\triangle\boldsymbol{u}+\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}\right).$$

非圧縮条件を代入して (ρ で割って)

(17) $$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}\boldsymbol{p}+\nu\triangle\boldsymbol{u}.$$

これが非圧縮粘性流体の運動方程式として有名な **Naier-Stokes**（ナヴィエ・ストークス） **方程式**である。

10.10 Navier-Stokes 方程式, Stokes 方程式, Euler 方程式

運動方程式 (9) に、非圧縮 Newton 流体の応力テンソルの式 (14) を代入すると

$$\rho\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}=-\operatorname{grad}p+\mu\left(\triangle\boldsymbol{u}+\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}\right). \tag{16}$$

非圧縮条件を代入して (ρ で割って)

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p+\nu\triangle\boldsymbol{u}. \tag{17}$$

これが非圧縮粘性流体の運動方程式として有名な **Naier-Stokes**(ナヴィエ・ストークス) **方程式**である。

物質微分 $D\boldsymbol{u}/Dt=\partial\boldsymbol{u}/\partial t+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$ の非線形項を無視した

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p+\nu\triangle\boldsymbol{u} \tag{18}$$

を **Stokes 方程式**と呼ぶ。遅い流れのシミュレーションに有効とされる。

10.10 Navier-Stokes 方程式, Stokes 方程式, Euler 方程式

運動方程式 (9) に、非圧縮 Newton 流体の応力テンソルの式 (14) を代入すると

(16) $$\rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\operatorname{grad} p + \mu \left(\triangle \boldsymbol{u} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} \right).$$

非圧縮条件を代入して (ρ で割って)

(17) $$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \triangle \boldsymbol{u}.$$

これが非圧縮粘性流体の運動方程式として有名な **Naier-Stokes**（ナヴィエ・ストークス） **方程式**である。

物質微分 $D\boldsymbol{u}/Dt = \partial \boldsymbol{u}/\partial t + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{u}$ の非線形項を無視した

(18) $$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \triangle \boldsymbol{u}$$

を **Stokes 方程式**と呼ぶ。遅い流れのシミュレーションに有効とされる。

完全流体 (粘性 $\nu = 0$, 非粘性流体) の場合、運動方程式は

(19) $$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p$$

となる。これを **Euler 方程式**と呼ぶ。

おまけ: 圧縮性流体の運動方程式

圧縮性流体の場合の方程式は

$$\rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\operatorname{grad} p + \mu \triangle \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u}. \tag{20}$$

10.11 境界条件

境界条件として代表的なものを 3 つ紹介する (他にもある)。

10.11 境界条件

境界条件として代表的なものを 3 つ紹介する (他にもある)。

1. **Dirichlet 境界条件**

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{21}$$

のように、境界での流速を指定する条件を Dirichlet 境界条件と呼ぶ。

10.11 境界条件

境界条件として代表的なものを 3 つ紹介する (他にもある)。

1. **Dirichlet 境界条件**

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{21}$$

のように、境界での流速を指定する条件を Dirichlet 境界条件と呼ぶ。

粘性流体が物体と接触しているところ (固体境界) では、流体粒子は物体にくっついて動かない (物体粒子との相対速度は $\mathbf{0}$) である。**粘着境界条件 (no-slip condition)** と呼ぶ。例えば物体が静止しているならば、$\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ であるから

$$\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \quad (\text{on } \partial\Omega). \tag{22}$$

発散定理より、$\displaystyle\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}\boldsymbol{u}\, d\boldsymbol{x}$ が成り立つので、非圧縮流体 ($\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0$) では、(21) の $\boldsymbol{b}$ は $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = 0$ を満たす必要がある (一般流束条件)。

10.11 境界条件

2. **応力境界条件**

   境界上で流体の応力 $\boldsymbol{P}$ が分かっているという状況では

   $$\sigma \boldsymbol{n} = \boldsymbol{P} \quad (\text{境界で}). \tag{23}$$

   (こういう状況がどれくらいあるか分からないが、シミュレーションには良く出て来る。)

3. **滑り境界条件**
　物体表面で、速度の (物体の) 法線方向の成分が 0 (物体を突き抜けない、物体から剥がれない)、流体の応力の接線成分が 0、という条件をしばしば考える。

10.11 境界条件

3. **滑り境界条件**

　物体表面で、速度の (物体の) 法線方向の成分が 0 (物体を突き抜けない、物体から剥がれない)、流体の応力の接線成分が 0、という条件をしばしば考える。

(i) 3 次元であれば

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0,\quad (\sigma\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0}\quad (\text{境界で}) \tag{24}$$

3. **滑り境界条件**
　物体表面で、速度の (物体の) 法線方向の成分が 0 (物体を突き抜けない、物体から剥がれない)、流体の応力の接線成分が 0、という条件をしばしば考える。
(i) 3 次元であれば

(24) $$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0,\quad (\sigma\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0}\quad (\text{境界で})$$

(ii) 2 次元であれば、接線ベクトルを $\boldsymbol{t}$ として

(25) $$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0,\quad (\sigma\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{t}=0\quad (\text{境界で}).$$

しばしば「滑り境界条件とは $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0$ のこと」と誤解されるので、2 点ほど注意を述べる。

- a. 完全流体であれば $\sigma=-pI$ であるから、(応力テンソルの連続性を仮定すると) $\sigma\boldsymbol{n}=-p\boldsymbol{n}$. ゆえに 2 つ目の方程式は自動的に満たされるので、$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0$ のみで十分である (と言えないこともない)。
- b. 変分法的な議論をする場合、2 つ目の方程式は、いわゆる "自然境界条件" になり、弱形式に現れない。

10.12 適切な問題のための条件

微分方程式の解を一意に定めるためには、連続の方程式、運動方程式以外に、境界条件や初期条件が必要になる。

[2]等温変化ならば $\rho \propto p$. 断熱変化ならば、Poisson の法則から $\rho \propto p^{1/\gamma}$, ここで γ (> 1) は等エントロピー指数 (isentropic exponent) と呼ばれる定数である。この辺になると温度も変化すると考えるべきなのかもしれない。

10.12 適切な問題のための条件

微分方程式の解を一意に定めるためには、連続の方程式、運動方程式以外に、境界条件や初期条件が必要になる。

この講義では、以下 θ や ρ は定数として議論を行うが、そうでない場合にどうすれば良いか、簡単に説明しておく。

- 温度 θ の変化を考える場合、熱方程式のような方程式を導入することになる。
- 密度 ρ の変化を考える場合は、状態方程式 $\rho = f(p)$ を導入することが多い[2]。

---

[2] 等温変化ならば $\rho \propto p$. 断熱変化ならば、Poisson の法則から $\rho \propto p^{1/\gamma}$, ここで $\gamma\ (> 1)$ は等エントロピー指数 (isentropic exponent) と呼ばれる定数である。この辺になると温度も変化すると考えるべきなのかもしれない。

10.12 適切な問題のための条件

微分方程式の解を一意に定めるためには、連続の方程式、運動方程式以外に、境界条件や初期条件が必要になる。

この講義では、以下 θ や ρ は定数として議論を行うが、そうでない場合にどうすれば良いか、簡単に説明しておく。

- 温度 θ の変化を考える場合、熱方程式のような方程式を導入することになる。
- 密度 ρ の変化を考える場合は、状態方程式 $\rho = f(p)$ を導入することが多い [2]。

θ や ρ は定数と仮定すると、以下の 4 つの条件で $\boldsymbol{u}$, p が一意的に定まると期待される。

(a) 非圧縮条件 (連続の方程式)
(b) 運動方程式 (Navier-Stokes 方程式, Stokes 方程式, Euler 方程式, etc.)
(c) 流速に関する境界条件
(d) 流速に関する初期条件　$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega})$

[2] 等温変化ならば $\rho \propto p$. 断熱変化ならば、Poisson の法則から $\rho \propto p^{1/\gamma}$, ここで γ (> 1) は等エントロピー指数 (isentropic exponent) と呼ばれる定数である。この辺になると温度も変化すると考えるべきなのかもしれない。

10.12 適切な問題のための条件

圧力に関しては、境界条件も初期条件も課さないことに注意しよう。

それとも少し関係するが、圧力はしばしば定数だけの不定さを持つ。実際、$\boldsymbol{u}$, p が (a)–(d) を満たすとき、任意の定数 C に対して $\boldsymbol{u}$, $p' = p + C$ が (a)–(d) を満たすことは明らかである。

10.12 適切な問題のための条件

圧力に関しては、境界条件も初期条件も課さないことに注意しよう。

それとも少し関係するが、圧力はしばしば定数だけの不定さを持つ。実際、$\boldsymbol{u}$, p が (a)–(d) を満たすとき、任意の定数 C に対して $\boldsymbol{u}$, $p' = p + C$ が (a)–(d) を満たすことは明らかである。

圧力 p を 1 つに定めるには、どこか 1 点での値を指定したり、

$$\int_\Omega p(\boldsymbol{x}, t)d\boldsymbol{x} = 0 \quad (\text{平均がつねに } 0) \tag{26}$$

という条件をつけたりする必要がある。

10.13 Navier-Stokes 方程式の無次元化と Reynolds 数

考えている問題に現れる長さ、速さについて、何か “代表的な” 値 L, U を取って

$$\boldsymbol{x}' := \frac{\boldsymbol{x}}{L}, \quad t' := \frac{t}{L/U}, \quad \boldsymbol{u}' := \frac{\boldsymbol{u}}{U}, \quad p' := \frac{1}{\rho U^2} p \tag{27}$$

とおくと、$\boldsymbol{x}'$ と t' は無次元の独立変数であり、$\boldsymbol{u}'$ と p' は無次元の従属変数である。

10.13 Navier-Stokes 方程式の無次元化と Reynolds 数

考えている問題に現れる長さ、速さについて、何か “代表的な” 値 L, U を取って

(27) $$\boldsymbol{x}' := \frac{\boldsymbol{x}}{L}, \quad t' := \frac{t}{L/U}, \quad \boldsymbol{u}' := \frac{\boldsymbol{u}}{U}, \quad p' := \frac{1}{\rho U^2} p$$

とおくと、$\boldsymbol{x}'$ と t' は無次元の独立変数であり、$\boldsymbol{u}'$ と p' は無次元の従属変数である。

$\boldsymbol{x}'$ についての gradient, Laplacian を ∇', $\triangle'$ と書くことにすると

(28) $$\frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial t'} + (\boldsymbol{u}' \cdot \nabla')\boldsymbol{u}' = -\operatorname{grad}' p' + \frac{1}{R} \triangle' \boldsymbol{u}'.$$

ただし R は

(29) $$R := \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{UL}{\nu}$$

で定義される無次元数 (dimensionless number) で、**Reynolds 数** (the Reynolds number) と呼ばれる。e を添えて R_{e} と書かれることも多い。

10.13 Navier-Stokes 方程式の無次元化と Reynolds 数

考えている問題に現れる長さ、速さについて、何か “代表的な” 値 L, U を取って

$$\boldsymbol{x}' := \frac{\boldsymbol{x}}{L}, \quad t' := \frac{t}{L/U}, \quad \boldsymbol{u}' := \frac{\boldsymbol{u}}{U}, \quad p' := \frac{1}{\rho U^2} p \tag{27}$$

とおくと、$\boldsymbol{x}'$ と t' は無次元の独立変数であり、$\boldsymbol{u}'$ と p' は無次元の従属変数である。
$\boldsymbol{x}'$ についての gradient, Laplacian を ∇', $\triangle'$ と書くことにすると

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial t'} + (\boldsymbol{u}' \cdot \nabla')\boldsymbol{u}' = -\operatorname{grad}' p' + \frac{1}{R}\triangle' \boldsymbol{u}'. \tag{28}$$

ただし R は

$$R := \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{UL}{\nu} \tag{29}$$

で定義される無次元数 (dimensionless number) で、**Reynolds 数** (the Reynolds number) と呼ばれる。e を添えて R_e と書かれることも多い。

$'$ を取ると、“無次元化された Navier-Stokes 方程式” が得られる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{R}\triangle \boldsymbol{u}. \tag{30}$$

Reynolds 数が大きいと、乱流が発生しうるようになり、数学的に扱いづらく (「Reynolds 数が十分小さければ」が多い)、数値計算的にも解きにくくなる。

10.13 Navier-Stokes 方程式の無次元化と Reynolds 数

無次元化方程式 (28) の導出

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{U}{L}\frac{\partial}{\partial t'},$$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1'} \\ \frac{\partial x_2'}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2'} \\ \frac{\partial x_3'}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_3'} \end{pmatrix} = \frac{1}{L}\nabla', \quad \triangle = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \frac{1}{L^2}\triangle'.$$

10.13 Navier-Stokes 方程式の無次元化と Reynolds 数

無次元化方程式 (28) の導出

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{U}{L}\frac{\partial}{\partial t'},$$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1'} \\ \frac{\partial x_2'}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2'} \\ \frac{\partial x_3'}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_3'} \end{pmatrix} = \frac{1}{L}\nabla', \quad \triangle = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \frac{1}{L^2}\triangle'.$$

以上を Navier-Stokes 方程式に代入して

$$\rho\left[\frac{U}{L}\frac{\partial}{\partial t'}Uu' + \left(Uu'\cdot\frac{1}{L}\nabla'\right)Uu'\right] = -\frac{1}{L}\nabla' p + \mu\frac{1}{L^2}\triangle' Uu'.$$

無次元化方程式 (28) の導出

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{U}{L}\frac{\partial}{\partial t'},$$

$$\nabla=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1'}\\ \frac{\partial x_2'}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2'}\\ \frac{\partial x_3'}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_3'}\end{pmatrix}=\frac{1}{L}\nabla',\quad \triangle=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}=\frac{1}{L^2}\triangle'.$$

以上を Navier-Stokes 方程式に代入して

$$\rho\left[\frac{U}{L}\frac{\partial}{\partial t'}Uu'+\left(Uu'\cdot\frac{1}{L}\nabla'\right)Uu'\right]=-\frac{1}{L}\nabla' p+\mu\frac{1}{L^2}\triangle' Uu'.$$

左辺、右辺それぞれ整理して

$$\frac{\rho U^2}{L}\left[\frac{\partial u'}{\partial t'}+\left(u'\cdot\nabla'\right)u'\right]=-\frac{1}{L}\nabla' p+\frac{\mu U}{L^2}.$$

両辺を $\rho U^2/L$ で割ると

$$\frac{\partial u'}{\partial t'}+(u'\cdot\nabla')u'=-\frac{1}{\rho U^2}\nabla' p+\frac{\mu}{\rho UL}\triangle' u'.$$

10.13 Navier-Stokes 方程式の無次元化と Reynolds 数

無次元化方程式 (28) の導出

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{U}{L}\frac{\partial}{\partial t'},$$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1'} \\ \frac{\partial x_2'}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2'} \\ \frac{\partial x_3'}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_3'} \end{pmatrix} = \frac{1}{L}\nabla', \quad \triangle = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \frac{1}{L^2}\triangle'.$$

以上を Navier-Stokes 方程式に代入して

$$\rho\left[\frac{U}{L}\frac{\partial}{\partial t'}Uu' + \left(Uu'\cdot\frac{1}{L}\nabla'\right)Uu'\right] = -\frac{1}{L}\nabla' p + \mu\frac{1}{L^2}\triangle' Uu'.$$

左辺、右辺それぞれ整理して

$$\frac{\rho U^2}{L}\left[\frac{\partial u'}{\partial t'} + (u'\cdot\nabla')\,u'\right] = -\frac{1}{L}\nabla' p + \frac{\mu U}{L^2}.$$

両辺を $\rho U^2/L$ で割ると

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + (u'\cdot\nabla')u' = -\frac{1}{\rho U^2}\nabla' p + \frac{\mu}{\rho U L}\triangle' u'.$$

p', R の定義 ($p' = \frac{1}{\rho U^2}p$, $R = \frac{\rho U L}{\mu}$) から、(28) を得る。 □

参考文献

[1] 岡本久, 中村周：関数解析, 岩波書店 (2006/1/26, 2016/11/10 (POD 版)), 岩波講座現代数学の基礎 (1996〜1999) の分冊を単行本化したもの.