応用数値解析特論 第 6 回

～2 次元 Poisson 方程式に対する有限要素法 (2)

桂田 祐史 (かつらだ まさし)

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/ana2021/

2021 年 10 月 25 日

目次

本日の内容・今後の予定など

- 2 次元の Poisson 方程式に対する有限要素法で、連立 1 次方程式が具体的にどのようになるか説明する。本来はプログラムについて説明すべきかもしれないが、それは次回に回す。
- FreeFem++ の紹介を行う。
  「FreeFem の紹介」 に沿って説明を行う。
- 次回から、しばらく FreeFem++ を用いた数値実験を行なう。

5.5 連立１次方程式の具体例

簡単な問題に対する有限要素法の連立１次方程式を実際に求めてみよう。

$$
\begin{aligned}
&\Omega = (0,1)\times(0,1),\\
&\Gamma_1 = \{(x,y); x=0, 0\le y\le 1\}\cup\{(x,y); 0\le x\le 1, y=0\},\\
&\Gamma_2 = \{(x,y); x=1, 0< y\le 1\}\cup\{(x,y); 0< x\le 1, y=1\},\\
&g_1\equiv 0,\quad g_2\equiv 0,\quad f\equiv \text{定数関数 } \overline{f}.
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
-\triangle u = \overline{f}\quad (\text{in } \Omega),\qquad u=0\quad \text{on } \Gamma_1,\qquad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0\quad \text{on } \Gamma_2.
$$

5.5 連立 1 次方程式の具体例

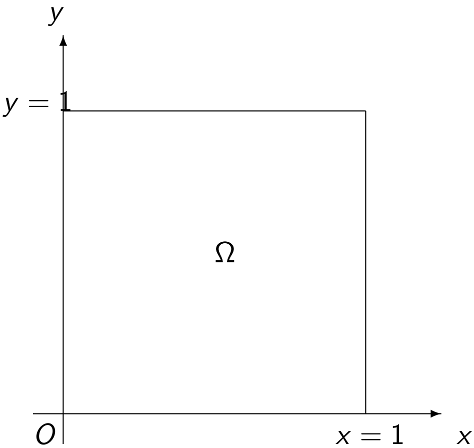


図 1: 領域 Ω

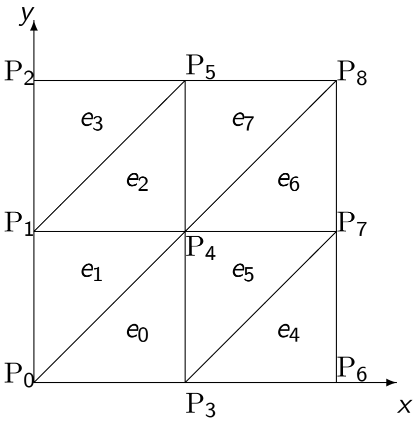


図 2: 要素分割

5.5 連立 1 次方程式の具体例

正方形領域 Ω を図 2 のように 3 角形要素によって要素分割する。

有限要素は次の二つのタイプがある (タイプ I, II と呼ぶことにする)。各々に図 3 のように局所節点番号をつける (左下から反時計回り)。

タイプ I e_0, e_2, e_4, e_6.
タイプ II e_1, e_3, e_5, e_7.

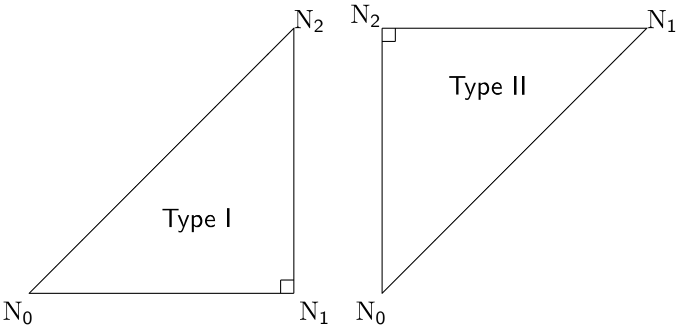


図 3: 二つのタイプの有限要素と局所節点番号

5.5 連立 1 次方程式の具体例

タイプが同じならば、要素係数行列 A_k, 要素自由項ベクトル $\boldsymbol{f}_k$ が等しいことはすぐ分かる。それぞれ A_I, A_{II}, f_I, f_{II} で表すことにする。

タイプ I については

$$D = h^2, \quad S = \frac{h^2}{2},$$

$$A_I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_I = \frac{\overline{f}h^2}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

タイプ II については

$$D = h^2, \quad S = \frac{h^2}{2},$$

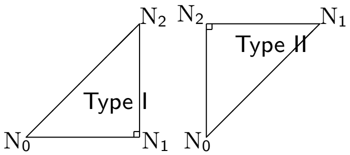
$$A_{II} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_{II} = \frac{\overline{f}h^2}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

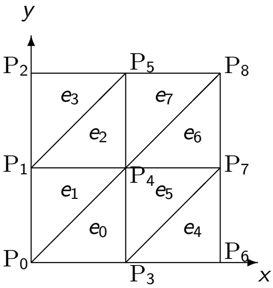
5.5 連立 1 次方程式の具体例

これらから、全体的な近似方程式を作ろう。

そのために局所的な節点番号と、全体的な節点番号の対応づけが必要である。そこで以下のような対応表を用意する。

要素	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
要素タイプ	I	II	I	II	I	II	I	II
N_0 の全体節点番号	0	0	1	1	3	3	4	4
N_1 の全体節点番号	3	4	4	5	6	7	7	8
N_2 の全体節点番号	4	1	5	2	7	4	8	5





5.5 連立 1 次方程式の具体例

これから Galerkin 法の弱形式は

$$
\boldsymbol{v}^\top \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}^\top \frac{\overline{f} h^2}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

for

$$
\forall \boldsymbol{v} \in \left\{ (v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8)^\top \in \mathbb{R}^9;\ v_0 = v_1 = v_2 = v_3 = v_6 = 0 \right\}.
$$

5.5 連立 1 次方程式の具体例　Dirichlet 境界条件の考慮

$P_i \in \Gamma_1$ となる i について (今の場合 $i = 0, 1, 2, 3, 6$)、第 i 行は削除してよい。

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \frac{\overline{f} h^2}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

また $P_i \in \Gamma_1$ となる i について、$u_i = g_1(P_i)$ $(= 0)$. これを代入して移項すると

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \frac{\overline{f} h^2}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(P_1) + g_1(P_3) \\ g_1(P_2)/2 \\ g_1(P_6)/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1/2 \\ -1 & 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{f} h^2 \\ \overline{h}^2/2 \\ \overline{f} h^2/2 \\ \overline{f} h^2/3 \end{pmatrix}.$$

5.5 連立1次方程式の具体例　Dirichlet 境界条件の考慮

上のやり方では、係数行列とベクトルが “縮小” される。例えば MATLAB では、$(0,1,2,3,6)$, $(4,5,7,8)$ という添字ベクトルを用意すれば、全体係数行列と全体自由項ベクトルを求めるのは容易である。

Dirichlet 境界条件の処理には、他のやり方 (行列とベクトルを縮小しない方法) もある。

5.5 連立1次方程式の具体例　Dirichlet 境界条件の考慮

ベクトル、行列の縮小を避ける方法 (1)

$P_i \in \Gamma_1$ となる i (この例では $i = 0, 1, 2, 3, 6$) に対して

- i 番目の方程式 ($\boldsymbol{v}^\top$ のせいで $\boldsymbol{0}^\top \boldsymbol{u} = 0$) を $u_i = g_1(P_i)$ で置き換える。
  (結果的に係数行列の第 i 行は $\boldsymbol{e}_i^\top$ で置き換える)

とすることで $\boldsymbol{v}^\top$ が外せる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1/2 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(\mathrm{P}_0) \\ g_1(\mathrm{P}_1) \\ g_1(\mathrm{P}_2) \\ g_1(\mathrm{P}_3) \\ \overline{f} h^2 \\ \overline{f} h^2/2 \\ g_1(\mathrm{P}_6) \\ \overline{f} h^2/2 \\ \overline{f} h^2/3 \end{pmatrix}$$

これで正しい方程式であるが、係数行列が対称でなくなっている (解く際に不利)。

- 係数行列の i 列に 0 でない非対角要素があれば、それと $g_1(P_i)$ との積を右辺に移項する。　(その結果は次のスライド)

5.5 連立 1 次方程式の具体例　Dirichlet 境界条件の考慮

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} g_1(\mathrm{P}_0) \\ g_1(\mathrm{P}_1) \\ g_1(\mathrm{P}_2) \\ g_1(\mathrm{P}_3) \\ \overline{f}h^2 \\ \overline{f}h^2/2 \\ g_1(\mathrm{P}_6) \\ \overline{f}h^2/2 \\ \overline{f}h^2/3 \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_1(P_1)+g_1(P_3) \\ g_1(P_2)/2 \\ 0 \\ g_1(P_6)/2 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

5.5 連立 1 次方程式の具体例　Dirichlet 境界条件の考慮

（説明のため、Galerkin 法の弱形式を再度掲示)

$$
\boldsymbol{v}^\top \frac{1}{2}
\begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix}
= \boldsymbol{v}^\top
\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{pmatrix}
$$

for

$$
\forall \boldsymbol{v} \in \left\{ (v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8)^\top \in \mathbb{R}^9;\ v_0 = v_1 = v_2 = v_3 = v_6 = 0 \right\}.
$$

ベクトル、行列の縮小を避ける方法 (2) (FreeFem++で採用？)

$P_i \in \Gamma_1$ となる i に対して、行列の (i, i) 成分を “terrible great value” `tgv` $(= 10^{30})$ で置き換え、右辺のベクトルの第 i 成分を `tgv` $\times\, g_1(P_i)$ で置き換える。方程式が近似方程式に置き換わってしまうが、以下の利点がある。

- 解は実質的にほぼ変わらない。
- 行列、ベクトルの縮小は不要。
- 係数行列の対称性は保たれる。
- コーディングの負担 (手間) が少ない。

T を tgv ($= 10^{30}$) として

$$\begin{pmatrix} T & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & T & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & T & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & T & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & T & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tg_1(P_0) \\ Tg_1(P_1) \\ Tg_1(P_2) \\ Tg_1(P_3) \\ f_4 \\ f_5 \\ Tg_1(P_6) \\ f_7 \\ f_8 \end{pmatrix}$$

5.6 プログラム　5.6.1 方程式を立てるのに必要なもの

有限要素解を計算する (連立 1 次方程式を作る) ため、何が必要かまとめる。

上の例 ($f \equiv \overline{f}$ (定数), $g_1 \equiv 0$, $g_2 \equiv 0$) では

- 節点の座標 ($i = 1, \cdots, m$ に対して P_i の座標 (x_i, y_i))
- Γ_1 上にある節点の全体節点番号
- 各要素 e_k を構成する節点の全体節点番号 $i_{k,0}$, $i_{k,1}$, $i_{k,2}$

が必要になった。

一般には次のものも必要になる。

- (a) Ω に属する節点 P_i での f の値 $f(P_i)$
- (b) Γ_1 上にある節点での g_1 の値
- (c) Γ_2 上にある節点の全体節点番号
- (d) Γ_2 上にある節点での g_2 の値

以上の情報があれば、Poisson 方程式の境界値問題を解くための一般的な方程式が作成できる。
(Ω, Γ_1, Γ_2, $\{e_k\}$, $\{P_i\}$, f, g_1, g_2 などの情報は、プログラムの中に埋め込まずに入力データとして与えることが出来る。)

5.6.2 サンプルプログラム紹介

菊地 [?] にはサンプル・プログラム (FORTRAN, C 言語) も用意されている。

[?] の初版の FORTRAN プログラムを C 言語に移植したプログラムを紹介する。長くなるので別資料として紹介する (動作チェックをするため公開は 2020/10/26 10:50 とする)。

「有限要素法のサンプル C プログラム」

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/ana2021/program10.pdf

6 FreeFem++の紹介

「FreeFem++ の紹介」 を見ながら、実際に Mac にインストールして、サンプル・プログラムを動かしてみる。

参考文献