

応用数値解析特論 第6回

～2次元 Poisson 方程式に対する有限要素法 (2)

かつらだ まさし
桂田 祐史

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/ana2021/>

2021年10月25日

目次

- 1 本日の内容・今後の予定など
- 2 2次元の有限要素法 (続き)
 - 連立1次方程式の具体例
 - プログラム
 - 方程式を立てるのに必要なもの
 - サンプルプログラム紹介
- 3 FreeFem++の紹介
- 4 参考文献

本日の内容・今後の予定など

- 2次元の Poisson 方程式に対する有限要素法で、連立1次方程式が具体的にどのようなになるか説明する。本来はプログラムについて説明すべきかもしれないが、それは次回に回す。

- 2次元の Poisson 方程式に対する有限要素法で、連立1次方程式が具体的にどのようなになるか説明する。本来はプログラムについて説明すべきかもしれないが、それは次回に回す。
- FreeFem++ の紹介を行う。
「FreeFem の紹介」に沿って説明を行う。
- 次回から、しばらく FreeFem++ を用いた数値実験を行なう。

5.5 連立1次方程式の具体例

簡単な問題に対する有限要素法の連立1次方程式を実際に求めてみよう。

5.5 連立1次方程式の具体例

簡単な問題に対する有限要素法の連立1次方程式を実際に求めてみよう。

$$\Omega = (0, 1) \times (0, 1),$$

$$\Gamma_1 = \{(x, y); x = 0, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, y = 0\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y); x = 1, 0 < y \leq 1\} \cup \{(x, y); 0 < x \leq 1, y = 1\},$$

$$g_1 \equiv 0, \quad g_2 \equiv 0, \quad f \equiv \text{定数関数 } \bar{f}.$$

すなわち

$$-\Delta u = \bar{f} \quad (\text{in } \Omega), \quad u = 0 \quad \text{on } \Gamma_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{on } \Gamma_2.$$

5.5 連立1次方程式の具体例

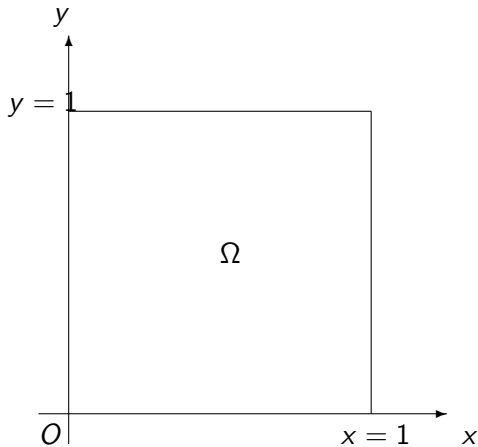


図 1: 領域 Ω

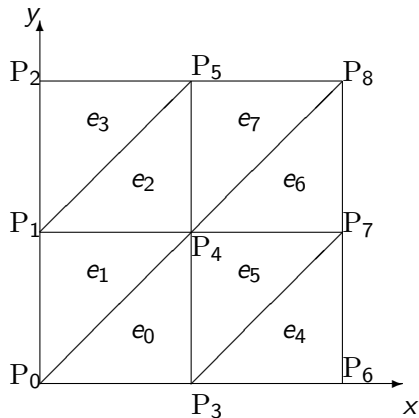


図 2: 要素分割

5.5 連立1次方程式の具体例

正方形領域 Ω を図2のように3三角形要素によって要素分割する。

有限要素は次の二つのタイプがある (タイプ I, II と呼ぶことにする)。各々に図3のように局所節点番号をつける (左下から反時計回り)。

タイプ I e_0, e_2, e_4, e_6 .

タイプ II e_1, e_3, e_5, e_7 .

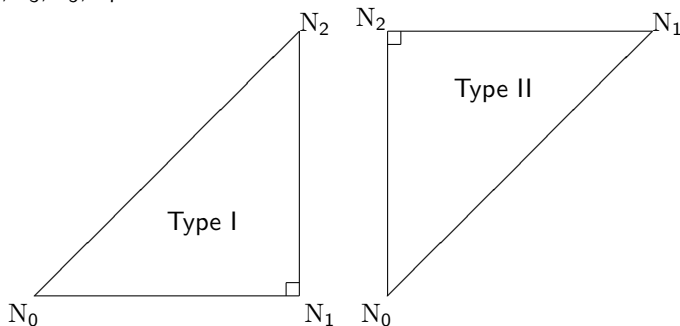


図 3: 二つのタイプの有限要素と局所節点番号

5.5 連立1次方程式の具体例

タイプが同じならば、要素係数行列 A_k , 要素自由項ベクトル f_k が等しいことはすぐ分かる。それぞれ A_I, A_{II}, f_I, f_{II} で表すことにする。

5.5 連立1次方程式の具体例

タイプが同じならば、要素係数行列 A_k , 要素自由項ベクトル f_k が等しいことはすぐ分かる。それぞれ A_I, A_{II}, f_I, f_{II} で表すことにする。

タイプIについては

$$D = h^2, \quad S = \frac{h^2}{2},$$

$$A_I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_I = \frac{\bar{f}h^2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

タイプIIについては

$$D = h^2, \quad S = \frac{h^2}{2},$$

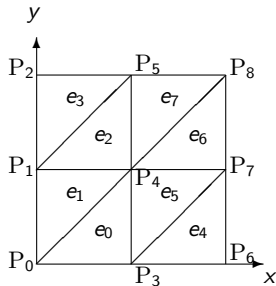
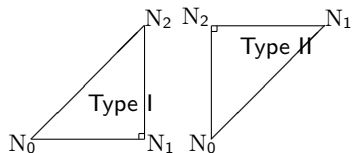
$$A_{II} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f_{II} = \frac{\bar{f}h^2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.5 連立1次方程式の具体例

これらから、全体的な近似方程式を作ろう。

そのために局所的な節点番号と、全体的な節点番号の対応づけが必要である。そこで以下のような対応表を用意する。

要素	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
要素タイプ	I	II	I	II	I	II	I	II
N_0 の全体節点番号	0	0	1	1	3	3	4	4
N_1 の全体節点番号	3	4	4	5	6	7	7	8
N_2 の全体節点番号	4	1	5	2	7	4	8	5



5.5 連立1次方程式の具体例

これから Galerkin 法の弱形式は

$$\mathbf{v}^T \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \mathbf{v}^T \frac{\bar{f} h^2}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

for

$$\forall \mathbf{v} \in \{(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8)^T \in \mathbb{R}^9; v_0 = v_1 = v_2 = v_3 = v_6 = 0\}.$$

5.5 連立1次方程式の具体例 Dirichlet境界条件の考慮

$P_i \in \Gamma_1$ となる i について (今の場合 $i = 0, 1, 2, 3, 6$)、第 i 行は削除してよい。

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \frac{\bar{f}h^2}{6} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5.5 連立1次方程式の具体例 Dirichlet境界条件の考慮

$P_i \in \Gamma_1$ となる i について (今の場合 $i = 0, 1, 2, 3, 6$)、第 i 行は削除してよい。

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \frac{\bar{f}h^2}{6} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

また $P_i \in \Gamma_1$ となる i について、 $u_i = g_1(P_i) (= 0)$ 。これを代入して移項すると

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \frac{\bar{f}h^2}{6} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(P_1) + g_1(P_3) \\ g_1(P_2)/2 \\ g_1(P_6)/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1/2 \\ -1 & 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f}h^2 \\ \bar{h}^2/2 \\ \bar{f}h^2/2 \\ \bar{f}h^2/3 \end{pmatrix}.$$

5.5 連立1次方程式の具体例 Dirichlet境界条件の考慮

上のやり方では、係数行列とベクトルが“縮小”される。例えば MATLAB では、 $(0, 1, 2, 3, 6)$, $(4, 5, 7, 8)$ という添字ベクトルを用意すれば、全体係数行列と全体自由項ベクトルを求めるのは容易である。

5.5 連立1次方程式の具体例 Dirichlet境界条件の考慮

上のやり方では、係数行列とベクトルが“縮小”される。例えば MATLAB では、 $(0, 1, 2, 3, 6)$, $(4, 5, 7, 8)$ という添字ベクトルを用意すれば、全体係数行列と全体自由項ベクトルを求めるのは容易である。

Dirichlet 境界条件の処理には、他のやり方 (行列とベクトルを縮小しない方法) もある。

5.5 連立1次方程式の具体例 Dirichlet境界条件の考慮

ベクトル、行列の縮小を避ける方法 (1)

$P_i \in \Gamma_1$ となる i (この例では $i = 0, 1, 2, 3, 6$) に対して

- i 番目の方程式 (\mathbf{v}^\top のせいで $\mathbf{0}^\top \mathbf{u} = 0$) を $u_i = g_1(P_i)$ で置き換える。
(結果的に係数行列の第 i 行は \mathbf{e}_i^\top で置き換える)

とすることで \mathbf{v}^\top が外せる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1/2 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(P_0) \\ g_1(P_1) \\ g_1(P_2) \\ g_1(P_3) \\ \bar{f}h^2 \\ \bar{f}h^2/2 \\ g_1(P_6) \\ \bar{f}h^2/2 \\ \bar{f}h^2/3 \end{pmatrix}$$

これで正しい方程式であるが、係数行列が対称でなくなっている (解く際に不利)。

- 係数行列の i 列に 0 でない非対角要素があれば、それと $g_1(P_i)$ との積を右辺に移項する。
(その結果は次のスライド)

5.5 連立1次方程式の具体例 Dirichlet境界条件の考慮

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1/2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1/2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 u_0 \\
 u_1 \\
 u_2 \\
 u_3 \\
 u_4 \\
 u_5 \\
 u_6 \\
 u_7 \\
 u_8
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 g_1(P_0) \\
 g_1(P_1) \\
 g_1(P_2) \\
 g_1(P_3) \\
 \bar{f}h^2 \\
 \bar{f}h^2/2 \\
 g_1(P_6) \\
 \bar{f}h^2/2 \\
 \bar{f}h^2/3
 \end{pmatrix}
 +
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 g_1(P_1) + g_1(P_3) \\
 g_1(P_2)/2 \\
 0 \\
 g_1(P_6)/2 \\
 0
 \end{pmatrix}.$$

5.5 連立1次方程式の具体例 Dirichlet境界条件の考慮

(説明のため、Galerkin法の弱形式を再度掲示)

$$\mathbf{v}^T \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \mathbf{v}^T \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{pmatrix}$$

for

$$\forall \mathbf{v} \in \{(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6, \mathbf{v}_7, \mathbf{v}_8)^T \in \mathbb{R}^9; \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_6 = 0\}.$$

ベクトル、行列の縮小を避ける方法 (2) (FreeFem++で採用?)

$P_i \in \Gamma_1$ となる i に対して、行列の (i, i) 成分を “terrible great value” $\text{tgv} (= 10^{30})$ で置き換え、右辺のベクトルの第 i 成分を $\text{tgv} \times g_1(P_i)$ で置き換える。方程式が近似方程式に置き換わってしまうが、以下の利点がある。

- 解は実質的にほぼ変わらない。
- 行列、ベクトルの縮小は不要。
- 係数行列の対称性は保たれる。
- コーディングの負担 (手間) が少ない。

5.5 連立1次方程式の具体例 Dirichlet境界条件の考慮

T を $\text{tgv} (= 10^{30})$ として

$$\mathbf{v}^\top \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \mathbf{v}^\top \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{pmatrix}$$

for

$$\forall \mathbf{v} \in \{(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6, \mathbf{v}_7, \mathbf{v}_8)^\top \in \mathbb{R}^9; \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_6 = \mathbf{0}\}.$$

5.5 連立1次方程式の具体例 Dirichlet境界条件の考慮

T を $\text{tgv} (= 10^{30})$ として

$$\begin{pmatrix} T & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & T & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & T & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & T & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & T & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tg_1(P_0) \\ Tg_1(P_1) \\ Tg_1(P_2) \\ Tg_1(P_3) \\ f_4 \\ f_5 \\ Tg_1(P_6) \\ f_7 \\ f_8 \end{pmatrix}$$

5.6 プログラム 5.6.1 方程式を立てるのに必要なもの

有限要素解を計算する (連立 1 次方程式を作る) ため、何が必要かまとめる。

上の例 ($f \equiv \bar{f}$ (定数), $g_1 \equiv 0$, $g_2 \equiv 0$) では

- 節点の座標 ($i = 1, \dots, m$ に対して P_i の座標 (x_i, y_i))
- Γ_1 上にある節点の全体節点番号
- 各要素 e_k を構成する節点の全体節点番号 $i_{k,0}, i_{k,1}, i_{k,2}$

が必要になった。

5.6 プログラム 5.6.1 方程式を立てるのに必要なもの

有限要素解を計算する (連立 1 次方程式を作る) ため、何が必要かまとめる。

上の例 ($f \equiv \bar{f}$ (定数), $g_1 \equiv 0$, $g_2 \equiv 0$) では

- 節点の座標 ($i = 1, \dots, m$ に対して P_i の座標 (x_i, y_i))
- Γ_1 上にある節点の全体節点番号
- 各要素 e_k を構成する節点の全体節点番号 $i_{k,0}, i_{k,1}, i_{k,2}$

が必要になった。

一般には次のものも必要になる。

- Ⓐ Ω に属する節点 P_i での f の値 $f(P_i)$
- Ⓑ Γ_1 上にある節点での g_1 の値
- Ⓒ Γ_2 上にある節点の全体節点番号
- Ⓓ Γ_2 上にある節点での g_2 の値

5.6 プログラム 5.6.1 方程式を立てるのに必要なもの

有限要素解を計算する (連立 1 次方程式を作る) ため、何が必要かまとめる。

上の例 ($f \equiv \bar{f}$ (定数), $g_1 \equiv 0$, $g_2 \equiv 0$) では

- 節点の座標 ($i = 1, \dots, m$ に対して P_i の座標 (x_i, y_i))
- Γ_1 上にある節点の全体節点番号
- 各要素 e_k を構成する節点の全体節点番号 $i_{k,0}, i_{k,1}, i_{k,2}$

が必要になった。

一般には次のものも必要になる。

- Ⓐ Ω に属する節点 P_i での f の値 $f(P_i)$
- Ⓑ Γ_1 上にある節点での g_1 の値
- Ⓒ Γ_2 上にある節点の全体節点番号
- Ⓓ Γ_2 上にある節点での g_2 の値

以上の情報があれば、Poisson 方程式の境界値問題を解くための一般的な方程式が作成できる。

($\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2, \{e_k\}, \{P_i\}, f, g_1, g_2$ などの情報は、プログラムの中に埋め込まずに入力データとして与えることができる。)

5.6.2 サンプルプログラム紹介

菊地 [1] にはサンプル・プログラム (FORTRAN, C 言語) も用意されている。

[1] の初版の FORTRAN プログラムを C 言語に移植したプログラムを紹介する。長くなるので別資料として紹介する (動作チェックをするため公開は 2020/10/26 10:50 とする)。

「有限要素法のサンプル C プログラム」

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/ana2021/program10.pdf>

6 FreeFem++の紹介

「FreeFem++ の紹介」を見ながら、実際に Mac にインストールして、サンプル・プログラムを動かしてみる。

- [1] 菊地文雄：有限要素法概説, サイエンス社 (1980), 新訂版 1999.