応用数値解析特論 第 5 回

～2 次元 Poisson 方程式に対する有限要素法 (1)～

桂田 祐史 (かつらだ まさし)

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/ana2021/

2021 年 10 月 18 日

目次

1. 本日の内容
2. 2 次元の有限要素法
   - 三角形要素への分割と区分的 1 次多項式
   - 三角形 e 上の 1 次関数 L_i と $(L_j, L_i)_e$,$\langle L_j, L_i \rangle_e$
     - 三角形の面積
     - 三角形要素の面積座標 L_i
     - 面積座標の積の積分と $(L_j, L_i)_e$
     - $L_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y$ の係数決定と $\langle L_j, L_i \rangle_e$
   - 要素係数行列の計算
   - 近似方程式の組み立て — 直接剛性法
3. 参考文献

本日の内容

- 2 次元 Poisson 方程式に対する有限要素法 (菊地 [?] の 4 章):
  大筋は前回の 1 次元 Poisson 方程式と同様である。
  - 三角形要素上の 1 次関数を重み座標 L_i を導入する。
  - 要素係数行列, 要素自由項ベクトルの公式が求まる。
  - 2 次元でも直接剛性法が出来る。

  やや技巧的な部分もあるが、学ぶ価値がある。

5 2 次元の有限要素法

第 2 回の授業で扱った Poisson 方程式の境界値問題を題材に、2 次元領域における有限要素法を説明する (菊地 [?] 第 5 章)。

(思い出す) Ω は $\mathbb{R}^2$ の有界領域で、その境界 Γ は区分的に十分滑らかであるとする。また Γ_1, Γ_2 は条件

$$\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \quad \Gamma_1 \neq \emptyset$$

を満たすとする。$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $g_1\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}$, $g_2\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}$ が与えられたとき、次の Poisson 方程式の境界値問題を考える。

問題 (P)

次式を満たす u を求めよ:

(1) $$-\triangle u = f \quad \text{in } \Omega,$$

(2) $$u = g_1 \quad \text{on } \Gamma_1,$$

(3) $$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = g_2 \quad \text{on } \Gamma_2,$$

ここで $\boldsymbol{n}$ は Γ の外向き単位法線ベクトルを表す。

大筋は 1 次元の場合と同様だが、(i) 各要素内の計算に面積座標を使うところと、(ii) 直接剛性法が 2 次元でも実現可能であることを理解するところが要点となる。

5.1 三角形要素への分割と区分的 1 次多項式

領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ に対し、$\overline{\Omega}$ を三角形 e_k $(1 \le k \le N_e)$ に分割する:

$$\overline{\Omega} \fallingdotseq \widehat{\Omega} := \bigcup_{k=1}^{N_e} e_k.$$

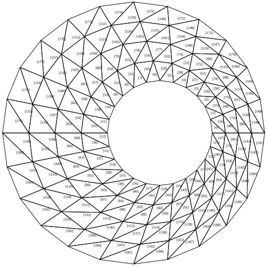

図 1: 二つの円で囲まれた閉領域 $\overline{\Omega}$ を三角形の合併で近似する

Ω が多角形でない限り、境界は「曲がっている」。$\overline{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{N_e} e_k$ は期待できない。

各三角形を 三角形 (有限) 要素とよぶ。

5.1 三角形要素への分割と区分的1次多項式

ただし、重なりや、すき間、頂点が他の三角形の辺上にあることは避けることにする。

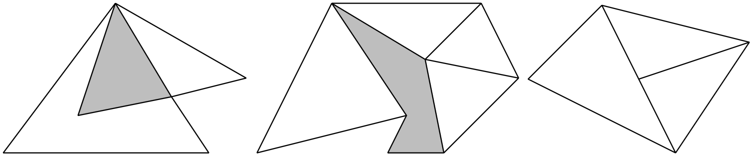

図 2: 重なり, すき間, 頂点が他の要素の辺上にある、なんてのはダメ

N_e は要素の総数 (the number of elements) で、プログラムでは NELMT のような名前の変数で記憶されることが多い。

有限要素の頂点を**節点** (node) と呼び、$\{\mathrm{P}_i\}_{i=1}^{m}$ のように番号をつけておく。

m は節点の総数 (the number of nodes) で、プログラムでは NNODE のような名前の変数で記憶されることが多い。

注意 1 次元の場合、節点の個数 = 要素の個数 + 1 という簡単な関係が成立していた。(区間を m 等分したとき、m を用いて、要素を e_k $(1 \le k \le m)$, 節点を x_k $(0 \le k \le m)$ と番号づけることが出来た。) 2 次元の場合は、そのような関係はない。

5.1 三角形要素への分割と区分的１次多項式

$\widehat{\Omega}$ 上連続で、各有限要素 e_k 上で x と y の 1 次多項式関数に等しいものを、**区分的 1 次多項式**と呼び、その全体を $\widetilde{X}$ で表わす ($\widetilde{X}$ はここだけの記号)。

$\{e_k\}_{k=1}^{N_e}$ と $\widetilde{X}$ の対を区分的１次有限要素 (piecewise linear finite element) と呼ぶ。

2 変数の 1 次関数 $z = a + bx + cy$ のグラフは平面であるから、$\widetilde{X}$ のグラフは、空間内の三角形を連続につなげた "折れ面" である。

試行関数の空間 $\hat{X}_{g_1}$, 試験関数の空間 $\hat{X}$ は次のように選ぶ。

(4) $$\hat{X}_{g_1} = \left\{ \hat{w} \in \widetilde{X} \;\middle|\; \hat{w} = \hat{g}_1 \quad \text{on } \Gamma_1 \right\}, \quad \hat{X} = \left\{ \hat{v} \in \widetilde{X} \;\middle|\; \hat{v} = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \right\}.$$

($\hat{g}_1$ は g_1 に近い計算しやすい関数)

$\widetilde{X}$ の基底関数 $\{\phi_i\}_{i=1}^{m}$ は

(5a) $$\phi_i \in \widetilde{X} \quad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

(5b) $$\phi_i(\mathrm{P}_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, m)$$

満たすものを採用する (この条件で一意に確定することに注意)。

平面上の三角形要素 e を考える。

e に属する節点を、反時計まわりに $\mathrm{N}_i = (x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, 2)$ とする。

後でしばしば必要になるので、e の面積 $|e|$ を計算しておこう。

$$
\begin{aligned}
|e| &= \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0)\right].
\end{aligned}
$$

1 次多項式全体を P^1 と表す:

$$
P^1 := \{\hat{u} \mid (\exists\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})\hat{u}(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y\}.
$$

任意の $\hat{u} \in P^1$ は、3 節点 N_i における値 $u^i := \widehat{u}(\mathrm{N}_i)$ $(i = 0, 1, 2)$ を指定すれば定まる ($u_i = \widehat{u}(\mathrm{P}_i)$ と混同しないように上に添字をつけた)。これは、直観的に明らかであるが (平面はその上の一直線上にない 3 点を指定すれば定まる)、すぐ後で基底が分かるので、それが証明になる。

5.2.2 三角形要素の面積座標 L_i

節点 N_i で 1, 他の節点で 0 となる 1 次関数を L_i とする $(i=0,1,2)$。つまり

(6a) $$L_i \in P^1,$$

(6b) $$L_i(\mathrm{N}_j) = L_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad (j = 0, 1, 2).$$

(L_0, L_1, L_2) は P^1 の基底になる。実際、任意の $\widehat{u} \in P^1$ は、

(7) $$\widehat{u}(x,y) = \sum_{i=0}^{2} u^i L_i(x,y) \quad ((x,y) \in e)$$

と表される (相異なる 3 点 N_i $(i=0,1,2)$ での値が等しい 1 次関数は等しい)。

任意の $\mathrm{P} \in e$ に対して、3 実数 $(L_0(P), L_1(P), L_2(P))$ を P の**面積座標** (area coordinate) あるいは**重心座標** (barycentric coordinate) と呼ぶ。(色々裏があるけれど今回は駆け足で進む。)

任意の $\mathrm{P} \in e$ に対して次式が成り立つ。

$$L_0(\mathrm{P}) + L_1(\mathrm{P}) + L_2(\mathrm{P}) = 1.$$

(L_i のグラフ $z = L_i(x,y)$ の鳥瞰図と等高線を描いておこう。)

Mathematica のコード例と実行結果

```
xs = {0, 3, 1}; ys = {0, 1, 2};
{a, b, c} = Inverse[Transpose[{{1, 1, 1}, xs, ys}]];
L[i_, x_, y_] := a[[i]] + b[[i]]*x + c[[i]]*y
xmin = Min[xs]; xmax = Max[xs]; ymin = Min[ys]; ymax = Max[ys];
gbase = RegionPlot[L[1, x, y] > 0 && L[2, x, y] > 0 && L[3, x, y] > 0,
                   {x, xmin, xmax},{y, ymin, ymax}]
gb=Table[Plot3D[L[i, x, y], {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax},
              RegionFunction -> Function[{x, y, z},
              L[1, x, y] > 0 && L[2, x, y] > 0 && L[3, x, y] > 0]], {i, 3}]
gc=Table[ContourPlot[L[i, x, y], {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax},
              RegionFunction -> Function[{x, y, z},
              L[1, x, y] > 0 && L[2, x, y] > 0 && L[3, x, y] > 0]], {i, 3}]
```

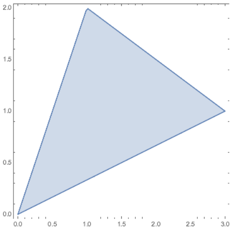

図 3: 三角形要素

Mathematica のコード例と実行結果

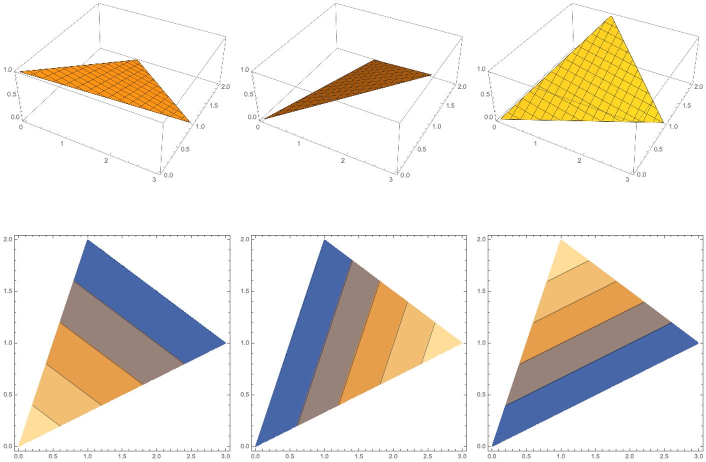

図 4: 左から L_0, L_1, L_2 の鳥瞰図と等高線

5.2.3 面積座標の積の積分と $(L_j, L_i)_e$

面積座標の積の積分については、便利な公式がある。
0 以上の任意の整数 i, j, k に対して

$$\text{(8)} \qquad \iint_e L_0(x,y)^i L_1(x,y)^j L_2(x,y)^k \, dx\,dy = 2|e| \frac{i!j!k!}{(i+j+k+2)!}.$$

証明 $\mathrm{P}_0 = (0,0)$, $\mathrm{P}_1 = (1,0)$, $\mathrm{P}_2 = (0,1)$ で囲まれる三角形を Δ とし、1 次関数 $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$\varphi(\mathrm{P}_0) = \mathrm{N}_0, \quad \varphi(\mathrm{P}_1) = \mathrm{N}_1, \quad \varphi(\mathrm{P}_2) = \mathrm{N}_2$$

で定める。実は

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

$$\det \varphi'(u,v) = \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} = 2|e|.$$

ゆえに変数変換 $(x,y) = \varphi(u,v)$ を行なうと

$$\begin{aligned} \iint_e L_0^i L_1^j L_2^k \, dx\,dy &= \iint_\Delta L_0(\varphi(u,v))^i L_1(\varphi(u,v))^j L_2(\varphi(u,v))^k \left|\det \varphi'(u,v)\right| du\,dv. \\ &= 2|e| \iint_\Delta L_0(\varphi(u,v))^i L_1(\varphi(u,v))^j L_2(\varphi(u,v))^k du\,dv. \end{aligned}$$

5.2.3 面積座標の積の積分と $(L_j, L_i)_e$

$L_i(\varphi(u,v))$ は (1 次関数と 1 次関数の合成であるから) 1 次関数で、

$$L_i(\varphi(\mathrm{P}_j)) = \delta_{ij}$$

を満たすことから、

$$L_0(\varphi(u,v)) = 1-u-v, \quad L_1(\varphi(u,v)) = u, \quad L_2(\varphi(u,v)) = v.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\iint_e L_0^i L_1^j L_2^k\,dxdy &= 2|e| \iint_\Delta (1-u-v)^i u^j v^k\,dudv \\ &= 2|e| \int_0^1 u^j \left(\int_0^{1-u} (1-u-v)^i v^k dv\right) du.\end{aligned}$$

内側の積分で、$v = (1-u)t$ $(0 \le t \le 1)$ と変数変換すると、

$$dv = (1-u)dt, \quad (1-u-v)^i = ((1-u)-(1-u)t)^i = (1-u)^i(1-t)^i$$

であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^{1-u} (1-u-v)^i v^k dv &= \int_0^1 (1-u)^i (1-t)^i (1-u)^k t^k \cdot (1-u)dt \\ &= (1-u)^{i+k+1} \int_0^1 (1-t)^i t^k\,dt.\end{aligned}$$

5.2.3 面積座標の積の積分と $(L_j, L_i)_e$

ゆえに

$$\iint_e L_0^i L_1^j L_2^k \, dx\,dy = 2|e| \int_0^1 (1-u)^{i+k+1} u^j \, du \int_0^1 (1-t)^i t^k dt.$$

復習 (？): ベータ関数

$$B(p,q) = \int_0^1 (1-t)^{p-1} t^{q-1}\, dt \quad (p,q>0)$$

とガンマ関数

$$\varGamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \quad (x>0)$$

について、次の公式が成り立つ (例えば桂田 [?] §E.2 の命題 E.2.4)。

$$B(p,q) = \frac{\varGamma(p)\varGamma(q)}{\varGamma(p+q)}, \quad \varGamma(n+1) = n! \quad (n\in\mathbb{N}).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
\iint_e L_0^i L_1^j L_2^k \, dx\,dy &= 2|e| B(i+k+2, j+1) B(i+1, k+1) \\
&= 2|e| \frac{\varGamma(i+k+2)\varGamma(j+1)}{\varGamma(i+j+k+3)} \frac{\varGamma(i+1)\varGamma(k+1)}{\varGamma(i+k+2)} \\
&= 2|e| \frac{\varGamma(i+1)\varGamma(j+1)\varGamma(k+1)}{\varGamma(i+j+k+3)} = 2|e| \frac{i!j!k!}{(i+j+k+2)!}. \qquad \square
\end{aligned}$$

5.2.3 面積座標の積の積分と $(L_j, L_i)_e$

$i = j$ の場合、それ以外の添字 ($\in \{0, 1, 2\}$) を k, ℓ とすると

$$(L_j, L_i)_e = \iint_e L_i^2 L_k^0 L_\ell^0 \, dxdy = 2\,|e|\,\frac{2!0!0!}{(2+0+0+2)!} = \frac{1}{6}|e|.$$

$i \neq j$ の場合、それ以外の添字 ($\in \{0, 1, 2\}$) を k とすると

$$(L_j, L_i)_e = \iint_e L_i^1 L_j^1 L_k^0 \, dxdy = 2\,|e|\,\frac{1!1!0!}{(1+1+0+2)!} = \frac{1}{12}\,|e|\,.$$

5.2.4 $L_i(x,y) = a_i + b_i x + c_i y$ の係数決定と $\langle L_j, L_i \rangle_e$

$$L_i(x,y) = a_i + b_i x + c_i y$$

とおくと

$$\delta_{ij} = L_j(x_i, y_i) = a_j + b_j x_i + c_j y_i = (1\ x_i\ \ y_i) \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{pmatrix}$$

であるから

$$(\heartsuit) \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 0 & x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ 0 & x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} = 2\,|e| > 0.$$

ゆえに A は逆行列を持つ。

5.2.4 $L_i(x,y) = a_i + b_i x + c_i y$ の係数決定と $\langle L_j, L_i \rangle_e$

(♡) から

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

(以下、公式 (**??**), (**??**) を導くが、スキップして良い) Cramer の公式によって

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & y_0 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & y_0 \\ 1 & y_1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^{\top}$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} x_1 y_2 - y_1 x_2 & -(y_2 - y_1) & x_2 - x_1 \\ -(x_0 y_2 - y_0 x_2) & y_2 - y_0 & -(x_2 - x_0) \\ x_0 y_1 - y_0 x_1 & -(y_1 - y_0) & x_1 - x_0 \end{pmatrix}^{\top}$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} x_1 y_2 - y_1 x_2 & x_2 y_0 - y_2 x_0 & x_0 y_1 - y_0 x_1 \\ y_1 - y_2 & y_2 - y_0 & y_0 - y_1 \\ x_2 - x_1 & x_0 - x_2 & x_1 - x_0 \end{pmatrix}.$$

5.2.4 $L_i(x,y) = a_i + b_i x + c_i y$ の係数決定と $\langle L_j, L_i \rangle_e$

A^{-1} の下 2 行 b_k, c_k $(k = 0,1,2)$ が得られれば、$\langle L_j, L_i \rangle_e$ が計算できる:

$$\begin{aligned} \langle L_j, L_i \rangle_e &= \iint_e \nabla L_j \cdot \nabla L_i \, dx\, dy = \iint_e \begin{pmatrix} b_j \\ c_j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_i \\ c_i \end{pmatrix} dx\, dy \\ &= (b_j b_i + c_j c_i)|e|. \end{aligned} \tag{9}$$

5.3 要素係数行列の計算

「積分は積分範囲を分割して計算し、後から和を取ればよい」ので、弱形式

$$\langle \widehat{u}, \widehat{v} \rangle = (f, \widehat{v}) + [g_2, \widehat{v}] \quad (\widehat{v} \in \widehat{X})$$

は

(10) $$\sum_{k=1}^{N_e} \langle \widehat{u}, \widehat{v} \rangle_{e_k} = \sum_{k=1}^{N_e} (f, \widehat{v})_{e_k} + [g_2, \widehat{v}] \quad (\widehat{v} \in \widehat{X})$$

となる。ただし

$$\langle \widehat{u}, \widehat{v} \rangle_{e_k} = \int_{e_k} \nabla \widehat{u}(x) \cdot \nabla \widehat{v}(x)\, dx, \quad (f, \widehat{v})_{e_k} = \int_{e_k} f(x)\, \widehat{v}(x)\, dx, \quad [g_2, \widehat{v}] = \int_{\Gamma_2} g_2 \widehat{v}\, d\sigma.$$

そこで $u^j := \widehat{u}(\mathrm{N}_j)$, $v^j := \widehat{v}(\mathrm{N}_j)$ $(j = 0, 1, 2)$ を用いて、

$$\widehat{u} = \sum_{j=0}^{2} u^j L_j, \quad \widehat{v} = \sum_{i=0}^{2} v^i L_i \quad (e_k \text{ 上})$$

と表すと

(11) $$\langle \widehat{u}, \widehat{v} \rangle_{e_k} = \sum_{j=0}^{2} \sum_{i=0}^{2} v^i A_{ij}^{(k)} u^j, \quad (f, \widehat{v})_{e_k} = \sum_{i=0}^{2} v^i f_i^{(k)},$$

ただし

(12) $$A_{ij}^{(k)} := \langle L_j, L_i \rangle_{e_k}, \quad f_i^{(k)} := (f, L_i)_{e_k}.$$

5.3 要素係数行列の計算

そこで

(13a) $$\boldsymbol{u}_k := \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_k := \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_k := \begin{pmatrix} f_0^{(k)} \\ f_1^{(k)} \\ f_2^{(k)} \end{pmatrix},$$

(13b) $$A_k := \begin{pmatrix} A_{00}^{(k)} & A_{01}^{(k)} & A_{02}^{(k)} \\ A_{10}^{(k)} & A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ A_{20}^{(k)} & A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} \end{pmatrix}$$

とおくと、 A_k は対称行列で、

(14) $$\langle \widehat{u}, \widehat{v} \rangle_{e_k} = \boldsymbol{v}_k^T A_k \boldsymbol{u}_k, \quad (f, \widehat{v})_{e_k} = \boldsymbol{v}_k^T \boldsymbol{f}_k.$$

(線積分 $[g_2, \hat{v}]$ については、今回の授業では説明を省略する。とりあえず $g_2 = 0$ と考えて授業を聴いて下さい。桂田 [?] には書いてある。)

$A_{ij}^{(k)} = \langle L_j, L_i \rangle_{e_k}$ の計算は (9) で済んでいる。

$f_i^{(k)} = (f, L_i)_{e_k}$ については、例えば L_i を 1 次関数補間して

$$(f, L_i)_{e_k} \fallingdotseq \left(\sum_{j=0}^{2} f(\mathrm{N}_j) L_j, L_i \right)_{e_k} = \sum_{j=0}^{2} f(\mathrm{N}_j) \left(L_j, L_i \right)_{e_k}.$$

のように近似すれば

$$(L_j, L_i)_{e_k} = \begin{cases} |e_k|/6 & (i = j \text{ のとき}), \\ |e_k|/12 & (i \neq j \text{ のとき}). \end{cases}$$

であるから

$$f_0^{(k)} \fallingdotseq \frac{|e_k|}{12} (2f(\mathrm{N}_0) + f(\mathrm{N}_1) + f(\mathrm{N}_2)),$$
$$f_1^{(k)} \fallingdotseq \frac{|e_k|}{12} (f(\mathrm{N}_0) + 2f(\mathrm{N}_1) + f(\mathrm{N}_2)),$$
$$f_2^{(k)} \fallingdotseq \frac{|e_k|}{12} (f(\mathrm{N}_0) + f(\mathrm{N}_1) + 2f(\mathrm{N}_2)).$$

このくらいで時間一杯か？
§5.4 に 20 分以上はかかりそう。

5.4 近似方程式の組み立て — 直接剛性法

$u_i := \widehat{u}(\mathrm{P}_i)$, $v_i := \widehat{v}(\mathrm{P}_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ として、

$$\boldsymbol{u} := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \tag{15}$$

とおく。

有限要素 e_k $(k = 1, 2, \cdots, N_e)$ の節点 N_0, N_1, N_2 に対して、

$$\mathrm{N}_0 = \mathrm{P}_{i_{k,0}}, \quad \mathrm{N}_1 = \mathrm{P}_{i_{k,1}}, \quad \mathrm{N}_2 = \mathrm{P}_{i_{k,2}}$$

となる整数 $i_{k,0}$, $i_{k,1}$, $i_{k,2}$ を取る (これらを**全体節点番号**と呼ぶ)。

$\boldsymbol{f}_k^* \in \mathbb{R}^m$ を $i_{k,0}$ 成分 $= f_0^{(k)}$, $i_{k,1}$ 成分 $= f_1^{(k)}$, $i_{k,2}$ 成分 $= f_2^{(k)}$ で、それ以外の成分はすべて 0 であるようなベクトルとする。例えば $i_0^{(k)} < i_1^{(k)} < i_2^{(k)}$ ならば

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & & i_{k,0} & & i_{k,1} & & i_{k,2} & & m \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \boldsymbol{f}_k^* = & (0 & \cdots 0 & f_0^{(k)} & 0 \cdots 0 & f_1^{(k)} & 0 \cdots 0 & f_2^{(k)} & 0 \cdots & 0)^\top. \end{array}$$

このように定義すると (実はとても簡単ということは次回見せる)、次が成り立つ。

$$(f, \widehat{v})_{e_k} = \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{f}_k^* \quad (k = 1, 2, \cdots, N_e). \tag{16}$$

同様の考え方で、行列 $A_k^* = (a_{ij}^{(k)})$ を

$$\begin{aligned}
&a_{i_{k,0}i_{k,0}}^{(k)} = A_{00}^{(k)}, \quad a_{i_{k,0}i_{k,1}}^{(k)} = A_{01}^{(k)}, \quad a_{i_{k,0}i_{k,2}}^{(k)} = A_{02}^{(k)},\\
&a_{i_{k,1}i_{k,0}}^{(k)} = A_{10}^{(k)}, \quad a_{i_{k,1}i_{k,1}}^{(k)} = A_{11}^{(k)}, \quad a_{i_{k,1}i_{k,2}}^{(k)} = A_{12}^{(k)},\\
&a_{i_{k,2}i_{k,0}}^{(k)} = A_{20}^{(k)}, \quad a_{i_{k,2}i_{k,1}}^{(k)} = A_{21}^{(k)}, \quad a_{i_{k,2}i_{k,2}}^{(k)} = A_{22}^{(k)},\\
&\text{それ以外} = 0
\end{aligned}$$

で定める。例えば $i_{k,0} < i_{k,1} < i_{k,2}$ ならば

$$A_k^* = \begin{pmatrix}
i_{k,0} & i_{k,1} & i_{k,2} & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
A_{00}^{(k)} & A_{01}^{(k)} & A_{02}^{(k)} & \leftarrow i_{k,0} \\
A_{10}^{(k)} & A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & \leftarrow i_{k,1} \\
A_{20}^{(k)} & A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} & \leftarrow i_{k,2}
\end{pmatrix} \quad \text{(書いてない成分は 0).}$$

これを用いると

$$\langle \widehat{u}, \widehat{v} \rangle_{e_k} = \boldsymbol{v}^\top A_k^* \boldsymbol{u} \quad (k = 1, 2, \cdots, N_e). \tag{17}$$

5.4 近似方程式の組み立て — 直接剛性法

ゆえに弱形式 (10) は ($g_2 = 0$ と考えている)

$$\sum_{k=1}^{N_e} \boldsymbol{v}^\top A_k^* \boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{N_e} \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{f}_k^*$$

すなわち

$$\boldsymbol{v}^\top \left(\sum_{k=1}^{N_e} A_k^* \boldsymbol{u} - \sum_{k=1}^{N_e} \boldsymbol{f}_k^* \right) = 0$$

と同値になる。

ゆえに

$$\boldsymbol{A}^* := \sum_{k=1}^{N_e} A_k^*, \quad \boldsymbol{f}^* := \sum_{k=1}^{N_e} \boldsymbol{f}_k^*$$

とおけば

$$\boldsymbol{v}^\top (\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}^*) = 0. \tag{18}$$

ここで $\boldsymbol{v}$ は

$$Y := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m;\ v_i = 0 \quad (\mathrm{P}_i \in \Gamma_1 \text{ なる } i) \right\}$$

の任意の元であるから、(18) は次と同値である。

$$\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f} \in Y^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m;\ w_i = 0 \quad (\mathrm{P}_i \notin \Gamma_1 \text{ なる } i) \right\}$$

すなわち

$$A^{**} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}^{**}. \tag{19}$$

ここで

$$\begin{aligned} A^{**} &:= \boldsymbol{A}^* \text{ の第 } i \text{ 行 } (\mathrm{P}_i \in \Gamma_1 \text{ なる } i) \text{ を除いた行列}, \\ \boldsymbol{f}^{**} &:= \boldsymbol{f}^* \text{ の第 } i \text{ 成分 } (\mathrm{P}_i \in \Gamma_1 \text{ なる } i) \text{ を除いた縦ベクトル}. \end{aligned}$$

5.4 近似方程式の組み立て — 直接剛性法

$$I := \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \le i \le m\}, \quad I_1 := \{i \in I \mid P_i \in \Gamma_1\}$$

とおく (I_1 は Γ_1 上にある節点の節点番号全体の集合)。

条件

$$u_i = g_1(\mathrm{P}_i) \quad (i \in I_1)$$

があるから、これを代入して u_i $(i \in I_1)$ を消去できる。以下それを実行する。

A^{**} を列ベクトルで

$$A^{**} = (\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \cdots \boldsymbol{a}_m)$$

のように表示すると、(19) は

(20) $$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a}_i u_i = \boldsymbol{f}^{**}.$$

移項して

$$\sum_{i \in I \setminus I_1} \boldsymbol{a}_i u_i = \boldsymbol{f}^{**} - \sum_{i \in I_1} \boldsymbol{a}_i u_i .$$

ゆえに

$$A\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{f},$$

ただし

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}^* &:= \boldsymbol{u} \text{ の第 } i \text{ 成分 } (i \in I_1) \text{ を除いた縦ベクトル}, \\
A &:= A^{**} \text{ の第 } i \text{ 列 } (i \in I_1) \text{ を除いた正方行列}, \\
\boldsymbol{f} &:= \boldsymbol{f}^{**} - \sum_{i \in I_1} \boldsymbol{a}_i u_i.
\end{aligned}$$

実際にプログラムを作成するとき、A や $\boldsymbol{f}$ が容易に求められることは次回解説する。

参考文献