応用数値解析特論 第 4 回
〜1 次元 Poisson 方程式に対する有限要素法〜

かつらだ まさし
桂田 祐史
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/ana2021/

2021 年 10 月 11 日

目次

4 1次元の有限要素法

有限要素法が実際に利用されるのは、空間 2 次元, 3 次元の問題がほとんどであるが、ここでは計算手順の概要 (特に直接剛性法) を理解するために、1 次元の Poisson 方程式の境界値問題に対する有限要素法の説明を行う。

4 1次元の有限要素法

有限要素法が実際に利用されるのは、空間 2 次元, 3 次元の問題がほとんどであるが、ここでは計算手順の概要 (特に直接剛性法) を理解するために、1 次元の Poisson 方程式の境界値問題に対する有限要素法の説明を行う。

このすぐ後に説明する 2 次元の場合を分かりやすくするためという趣旨である (いきなり全部やると大変)。

4 1次元の有限要素法

有限要素法が実際に利用されるのは、空間 2 次元, 3 次元の問題がほとんどであるが、ここでは計算手順の概要 (特に直接剛性法) を理解するために、1 次元の Poisson 方程式の境界値問題に対する有限要素法の説明を行う。

このすぐ後に説明する 2 次元の場合を分かりやすくするためという趣旨である (いきなり全部やると大変)。

以上は、菊地 [1] の内容を踏襲したものだが、私自身の経験から「分かりやすい」と思っている。

4.1 モデル問題とその弱定式化

問題 (P) の 1 次元版である、常微分方程式の境界値問題

(1)
$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & (x \in (0,1)) \\ u(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta \end{cases}$$

を考える。

4.1 モデル問題とその弱定式化

問題 (P) の 1 次元版である、常微分方程式の境界値問題

$$(1) \qquad \begin{cases} -u''(x) = f(x) & (x \in (0,1)) \\ u(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta \end{cases}$$

を考える。ここで f は $(0,1)$ 上定義された既知関数、α と β は既知実定数である。

4.1 モデル問題とその弱定式化

問題 (P) の 1 次元版である、常微分方程式の境界値問題

$$
(1)\qquad \begin{cases} -u''(x) = f(x) & (x \in (0,1)) \\ u(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta \end{cases}
$$

を考える。ここで f は $(0,1)$ 上定義された既知関数、α と β は既知実定数である。(要するに $n = 1$, $\Omega = (0,1)$, $\Gamma = \{0,1\}$, $\Gamma_1 = \{0\}$, $\Gamma_2 = \{1\}$, $g_1 = \alpha$, $g_2 = \beta$ である。)

4.1 モデル問題とその弱定式化

問題 (P) の 1 次元版である、常微分方程式の境界値問題

$$(1) \qquad \begin{cases} -u''(x) = f(x) & (x \in (0,1)) \\ u(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta \end{cases}$$

を考える。ここで f は $(0,1)$ 上定義された既知関数、α と β は既知実定数である。(要するに $n = 1$, $\Omega = (0,1)$, $\Gamma = \{0,1\}$, $\Gamma_1 = \{0\}$, $\Gamma_2 = \{1\}$, $g_1 = \alpha$, $g_2 = \beta$ である。)

$$X_{g_1} := \left\{ w \in H^1(I) \;\middle|\; w(0) = \alpha \right\}, \quad X := \left\{ v \in H^1(I) \;\middle|\; v(0) = 0 \right\},$$

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 u'(x) v'(x)\, dx, \quad (f, v) := \int_0^1 f(x) v(x)\, dx$$

とおくと、(1) の弱解とは、弱形式

$$(2) \qquad \langle u, v \rangle = (f, v) + \beta v(1) \quad (v \in X)$$

を満たす $u \in X_{g_1}$ のことである。

4.2 有限要素解の定義　要点

要点はすでに予告してある。

有限要素法は区分的多項式を試行関数、試験関数に用いる Ritz-Galerkin 法である。

一般に、X_{g_1}, X の有限次元近似 $\hat{X}_{g_1}$, $\hat{X}$ を定めて、(1 つの) Ritz-Galerkin 解が定義される。

区分的多項式というものを定義して、それを用いて適切に $\hat{X}_{g_1}$, $\hat{X}$ を定めることで有限要素解が定義できる。

4.2.1 有限要素, 区分 1 次多項式

区間 $[0, 1]$ を m 個の小区間に分割する:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = 1.$$

4.2.1 有限要素, 区分 1 次多項式

区間 $[0,1]$ を m 個の小区間に分割する:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = 1.$$

x_i $(0 \le i \le m)$ を**節点** (**node**) と呼ぶ。

4.2.1 有限要素, 区分 1 次多項式

区間 $[0,1]$ を m 個の小区間に分割する:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = 1.$$

x_i $(0 \le i \le m)$ を**節点** (**node**) と呼ぶ。
区間 $e_k := [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, \cdots, m)$ を**有限要素** (**finite element**) と呼ぶ。

4.2.1 有限要素, 区分 1 次多項式

区間 $[0,1]$ を m 個の小区間に分割する:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = 1.$$

x_i $(0 \le i \le m)$ を**節点** (**node**) と呼ぶ。

区間 $e_k := [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, \cdots, m)$ を**有限要素** (**finite element**) と呼ぶ。

区間 $[0,1]$ 全体で連続で、各要素 e_k 上で 1 次関数に等しい関数を**区分的 1 次多項式**と呼び、区分的 1 次多項式の全体を $\widetilde{X}$ と表す。$\dim \widetilde{X} = m + 1$ である。

試行関数 (近似解) $\hat{u}$, 試験関数 $\hat{v}$ として、区分的 1 次多項式を採用しよう。言い換えると、試行関数の空間 $\hat{X}_{g_1}$, 試験関数の空間 $\hat{X}$ は、$\hat{X}_{g_1} \subset \widetilde{X}$, $\hat{X} \subset \widetilde{X}$ を満たすよう定める。

4.2.2 区分的 1 次多項式の空間の基底関数

$\widetilde{X}$ の 基底関数として、以下に定義する $\{\phi_i\}_{i=0}^{m}$ を採用できる。

ϕ_i の定義

ϕ_i は区分的 1 次多項式で、x_i では 1, 他の節点 x_j $(j \neq i)$ では 0 という値を取る。

4.2.2 区分的 1 次多項式の空間の基底関数

$\tilde{X}$ の 基底関数として、以下に定義する $\{\phi_i\}_{i=0}^m$ を採用できる。

ϕ_i の定義

ϕ_i は区分的 1 次多項式で、x_i では 1, 他の節点 x_j $(j \neq i)$ では 0 という値を取る。

(i) $\phi_i \in C[0,1]$

(ii) $(\forall k \in \{1, \cdots, m\})\ (\exists p, q \in \mathbb{R})\ (\forall x \in e_k)\ \phi_i(x) = px + q$

(iii) $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$.

4.2.2 区分的 1 次多項式の空間の基底関数

次の性質が基本的である。

補題 4.1 (基底関数 ϕ_i の性質)

$w_i \in \mathbb{R}$ $(0 \le i \le m)$ に対して

$$\hat{w}(x) := \sum_{i=0}^{m} w_i \phi_i(x)$$

とおくと

$$\hat{w}(x_j) = w_j \quad (0 \le j \le m).$$

すなわち ϕ_i の係数 w_i は、節点 x_i における関数値である。

4.2.2 区分的1次多項式の空間の基底関数

次の性質が基本的である。

補題 4.1 (基底関数 ϕ_i の性質)

$w_i \in \mathbb{R}$ $(0 \le i \le m)$ に対して

$$\hat{w}(x) := \sum_{i=0}^{m} w_i \phi_i(x)$$

とおくと

$$\hat{w}(x_j) = w_j \quad (0 \le j \le m).$$

すなわち ϕ_i の係数 w_i は、節点 x_i における関数値である。

証明.

任意の $j \in \{0, 1, \cdots, m\}$ に対して

$$\hat{w}(x_j) = \sum_{i=0}^{m} w_i \phi_i(x_j) = \sum_{i=0}^{m} w_i \delta_{ij} = w_j \delta_{jj} = w_j.$$

$\square$

4.2.3 有限要素空間, 有限要素解

試行関数の空間 $\hat{X}_{g_1}$ と試験関数の空間 $\hat{X}$ として、次のものを採用する。

$$\hat{X}_{g_1} = \left\{ \hat{w} \in \widetilde{X} \;\middle|\; \hat{w}(0) = \alpha \right\}, \quad \hat{X} = \left\{ \hat{v} \in \widetilde{X} \;\middle|\; \hat{v}(0) = 0 \right\}.$$

基底関数を用いて表すと

$$\hat{X}_{g_1} = \left\{ \alpha\phi_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i\phi_i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \right\}, \tag{3}$$

$$\hat{X} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i\phi_i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \right\}. \tag{4}$$

4.2.3 有限要素空間, 有限要素解

試行関数の空間 $\hat{X}_{g_1}$ と試験関数の空間 $\hat{X}$ として、次のものを採用する。

$$\hat{X}_{g_1} = \left\{ \hat{w} \in \widetilde{X} \;\middle|\; \hat{w}(0) = \alpha \right\}, \quad \hat{X} = \left\{ \hat{v} \in \widetilde{X} \;\middle|\; \hat{v}(0) = 0 \right\}.$$

基底関数を用いて表すと

$$\hat{X}_{g_1} = \left\{ \alpha\phi_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i\phi_i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \right\}, \tag{3}$$

$$\hat{X} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i\phi_i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \right\}. \tag{4}$$

このとき定まる Ritz-Galerkin 解を $\hat{u}$ とする。すなわち $\hat{u}$ は

$$\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}, \tag{5a}$$

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + \beta \hat{v}(1) \quad (\hat{v} \in \hat{X}). \tag{5b}$$

を満たす。この $\hat{u}$ を (P1 要素を用いた) **有限要素解**と呼ぶ。

4.2.4 蛇足の話

(実は必要がないのだけれど) 式で書くと、$1 \le i \le m-1$ に対しては

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & (x \in [x_{i-1}, x_i]) \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & (x \in [x_i, x_{i+1}]) \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

$i = 0$ に対しては

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & (x \in [x_0, x_1]) \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

$i = m$ に対しては

$$\phi_m(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{m-1}}{x_m - x_{m-1}} & (x \in [x_{m-1}, x_m]) \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

4.2.4 蛇足の話

(実は必要がないのだけれど) 式で書くと、$1 \le i \le m-1$ に対しては

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & (x \in [x_{i-1}, x_i]) \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & (x \in [x_i, x_{i+1}]) \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

$i = 0$ に対しては

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & (x \in [x_0, x_1]) \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

$i = m$ に対しては

$$\phi_m(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{m-1}}{x_m - x_{m-1}} & (x \in [x_{m-1}, x_m]) \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

このように式で書けるけれど、そうしてもほとんど使いみちがない。

$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ を満たす連続な区分的 1 次関数ということ、それとそのグラフのイメージを覚えた方がよい。

4.3 有限要素解を求めるアルゴリズム

前項までに有限要素解 $\hat{u}$ は定義された。$\hat{u}$ は

$$\hat{u} = \alpha\phi_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i\phi_i$$

と表すことができるが、u_i を並べた

$$\boldsymbol{u}^* = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = (u_1, u_2, \cdots, u_m)^\top$$

について、連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{f}^*$ が得られることは原理的に分かっている。

しかし、

4.3 有限要素解を求めるアルゴリズム

前項までに有限要素解 $\hat{u}$ は定義された。$\hat{u}$ は

$$\hat{u} = \alpha\phi_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i\phi_i$$

と表すことができるが、u_i を並べた

$$\boldsymbol{u}^* = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = (u_1, u_2, \cdots, u_m)^\top$$

について、連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{f}^*$ が得られることは原理的に分かっている。

しかし、$A = (\langle\phi_j, \phi_i\rangle)$ や $\boldsymbol{f}^*$ を実際に計算するのは、やり方を知らないと案外難しい。有限要素法ではこのあたりが良く整備されていて、明快なアルゴリズムが確立されている。

4.3 有限要素解を求めるアルゴリズム

前項までに有限要素解 $\hat{u}$ は定義された。$\hat{u}$ は

$$\hat{u} = \alpha\phi_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i\phi_i$$

と表すことができるが、u_i を並べた

$$\boldsymbol{u}^* = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = (u_1, u_2, \cdots, u_m)^\top$$

について、連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{f}^*$ が得られることは原理的に分かっている。

しかし、$A = (\langle\phi_j, \phi_i\rangle)$ や $\boldsymbol{f}^*$ を実際に計算するのは、やり方を知らないと案外難しい。有限要素法ではこのあたりが良く整備されていて、明快なアルゴリズムが確立されている。

有限要素 e_k ごとに、要素係数行列、要素自由項ベクトルというものを求め、それから A と $\boldsymbol{f}$ を "組み立てる"。後半の操作を構造力学の用語にちなみ直接剛性法と呼ぶ。

4.3 有限要素解を求めるアルゴリズム

前項までに有限要素解 $\hat{u}$ は定義された。$\hat{u}$ は

$$\hat{u} = \alpha\phi_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i\phi_i$$

と表すことができるが、u_i を並べた

$$\boldsymbol{u}^* = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = (u_1, u_2, \cdots, u_m)^\top$$

について、連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{f}^*$ が得られることは原理的に分かっている。

しかし、$A = (\langle\phi_j, \phi_i\rangle)$ や $\boldsymbol{f}^*$ を実際に計算するのは、やり方を知らないと案外難しい。有限要素法ではこのあたりが良く整備されていて、明快なアルゴリズムが確立されている。

有限要素 e_k ごとに、要素係数行列、要素自由項ベクトルというものを求め、それから A と $\boldsymbol{f}$ を "組み立てる"。後半の操作を構造力学の用語にちなみ直接剛性法と呼ぶ。　……　少し長い込み入った話になる。

4.3.1 長さ座標

各要素 $e_k = [x_{k-1}, x_k]$ において

$$L_0(x_{k-1}) = 1, \quad L_0(x_k) = 0,$$
$$L_1(x_{k-1}) = 0, \quad L_1(x_k) = 1$$

で定まる 1 次関数 L_0, L_1 を e_k の**長さ座標**と呼ぶ (グラフを自分で描こう)。

4.3.1 長さ座標

各要素 $e_k = [x_{k-1}, x_k]$ において

$$L_0(x_{k-1}) = 1, \quad L_0(x_k) = 0,$$
$$L_1(x_{k-1}) = 0, \quad L_1(x_k) = 1$$

で定まる 1 次関数 L_0, L_1 を e_k の**長さ座標**と呼ぶ (グラフを自分で描こう)。

(6) $$L_0 + L_1 \equiv 1$$

が成り立つ。

4.3.1 長さ座標

各要素 $e_k = [x_{k-1}, x_k]$ において

$$L_0(x_{k-1}) = 1, \quad L_0(x_k) = 0,$$
$$L_1(x_{k-1}) = 0, \quad L_1(x_k) = 1$$

で定まる 1 次関数 L_0, L_1 を e_k の**長さ座標**と呼ぶ (グラフを自分で描こう)。

$$L_0 + L_1 \equiv 1 \tag{6}$$

が成り立つ。また節点の座標 x_{k-1}, x_k を用いて

$$L_0(x) = \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \tag{7}$$

と具体的に表わせる (こちらは ϕ_i と違って、後でちょっと用いる)。

4.3.1 長さ座標

各要素 $e_k = [x_{k-1}, x_k]$ において

$$L_0(x_{k-1}) = 1, \quad L_0(x_k) = 0,$$
$$L_1(x_{k-1}) = 0, \quad L_1(x_k) = 1$$

で定まる 1 次関数 L_0, L_1 を e_k の**長さ座標**と呼ぶ (グラフを自分で描こう)。

(6) $$L_0 + L_1 \equiv 1$$

が成り立つ。また節点の座標 x_{k-1}, x_k を用いて

(7) $$L_0(x) = \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$$

と具体的に表わせる (こちらは ϕ_i と違って、後でちょっと用いる)。

$\hat{w} \in \widetilde{X}$ に対して $w_i := \hat{w}(x_i)$ とおくと、次式が成り立つ:

(8) $$\hat{w}(x) = w_{k-1} L_0(x) + w_k L_1(x)$$

4.3.1 長さ座標

各要素 $e_k = [x_{k-1}, x_k]$ において

$$L_0(x_{k-1}) = 1, \quad L_0(x_k) = 0,$$
$$L_1(x_{k-1}) = 0, \quad L_1(x_k) = 1$$

で定まる 1 次関数 L_0, L_1 を e_k の**長さ座標**と呼ぶ (グラフを自分で描こう)。

(6) $$L_0 + L_1 \equiv 1$$

が成り立つ。また節点の座標 x_{k-1}, x_k を用いて

(7) $$L_0(x) = \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$$

と具体的に表わせる (こちらは ϕ_i と違って、後でちょっと用いる)。

$\hat{w} \in \widetilde{X}$ に対して $w_i := \hat{w}(x_i)$ とおくと、次式が成り立つ:

(8) $$\hat{w}(x) = w_{k-1}L_0(x) + w_k L_1(x) = \sum_{j=0}^{1} w_{k+j-1}L_j \quad (x \in e_k).$$

(たった 2 項なのに $\sum$ を使うのは大げさなようだけれど…)

各要素 e_k について

$$\langle u, v\rangle_{e_k} := \int_{x_{k-1}}^{x_k} u'(x)v'(x)dx, \qquad (f, v)_{e_k} := \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)v(x)dx \tag{9}$$

とおくと、

4.3.2 弱形式の分割

各要素 e_k について

$$(9) \qquad \langle u, v\rangle_{e_k} := \int_{x_{k-1}}^{x_k} u'(x)v'(x)dx, \qquad (f, v)_{e_k} := \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)v(x)dx$$

とおくと、Galerkin 法の弱形式

$$(\text{再掲 } 2) \qquad \langle \hat{u}, \hat{v}\rangle = (f, \hat{v}) + \beta\hat{v}(1) \quad (\hat{v} \in \hat{X})$$

は

$$(10) \qquad \sum_{k=1}^{m} \langle \hat{u}, \hat{v}\rangle_{e_k} = \sum_{k=1}^{m} (f, \hat{v})_{e_k} + \beta\hat{v}(1) \quad (\hat{v} \in \hat{X})$$

と書き直せる ($\because \int_0^1 = \sum_{k=1}^{m} \int_{e_k}$)。

4.3.3 要素係数行列, 要素自由項ベクトル

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \langle \sum_{j=0}^{1} u_{k+j-1} L_j, \sum_{i=0}^{1} v_{k+i-1} L_i \rangle_{e_k} = \sum_{j=0}^{1} \sum_{i=0}^{1} u_{k+j-1} v_{k+i-1} \langle L_j, L_i \rangle_{e_k}$$
$$= \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} v_{k+i-1} A_{ij}^{(k)} u_{k+j-1},$$

ただし

$$A_{ij}^{(k)} := \langle L_j, L_i \rangle_{e_k}.$$

4.3.3 要素係数行列, 要素自由項ベクトル

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \langle \sum_{j=0}^{1} u_{k+j-1} L_j, \sum_{i=0}^{1} v_{k+i-1} L_i \rangle_{e_k} = \sum_{j=0}^{1} \sum_{i=0}^{1} u_{k+j-1} v_{k+i-1} \langle L_j, L_i \rangle_{e_k}$$
$$= \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} v_{k+i-1} A_{ij}^{(k)} u_{k+j-1},$$

ただし

$$A_{ij}^{(k)} := \langle L_j, L_i \rangle_{e_k}.$$

一方、

$$(f, \hat{v})_{e_k} = (f, \sum_{j=0}^{1} v_{k+j-1} L_j)_{e_k} = \sum_{j=0}^{1} v_{k+j-1} (f, L_j)_{e_k} = \sum_{j=0}^{1} v_{k+j-1} f_j^{(k)},$$

ただし

$$f_j^{(k)} := (f, L_j)_{e_k}.$$

4.3.3 要素係数行列, 要素自由項ベクトル

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \langle \sum_{j=0}^{1} u_{k+j-1} L_j, \sum_{i=0}^{1} v_{k+i-1} L_i \rangle_{e_k} = \sum_{j=0}^{1} \sum_{i=0}^{1} u_{k+j-1} v_{k+i-1} \langle L_j, L_i \rangle_{e_k}$$

$$= \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} v_{k+i-1} A_{ij}^{(k)} u_{k+j-1},$$

ただし

$$A_{ij}^{(k)} := \langle L_j, L_i \rangle_{e_k}.$$

一方、

$$(f, \hat{v})_{e_k} = (f, \sum_{j=0}^{1} v_{k+j-1} L_j)_{e_k} = \sum_{j=0}^{1} v_{k+j-1} (f, L_j)_{e_k} = \sum_{j=0}^{1} v_{k+j-1} f_j^{(k)},$$

ただし

$$f_j^{(k)} := (f, L_j)_{e_k}.$$

また $\widehat{v}(1) = v_m$ より

$$\beta \hat{v}(1) = \beta v_m.$$

2 次形式と行列を用いた表記　$x_1, \cdots, x_m$ に対する“純粋の 2 次式”

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j \tag{11}$$

を 2 次形式とよぶ

2 次形式と行列を用いた表記　$x_1, \cdots, x_m$ に対する "純粋の 2 次式"

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j \tag{11}$$

を 2 次形式とよぶ

$A := (a_{ij})$ とおくと、A は m 次正方行列であるが

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(x_i \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \right) = Ax \text{ と } x \text{ の内積} = x^\top Ax.$$

2 次形式と行列を用いた表記　$x_1, \cdots, x_m$ に対する “純粋の 2 次式”

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j \tag{11}$$

を 2 次形式とよぶ

$A := (a_{ij})$ とおくと、A は m 次正方行列であるが

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(x_i \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \right) = Ax \text{ と } x \text{ の内積} = x^\top Ax.$$

A を 2 次形式 (11) の係数行列とよぶ。普通は対称行列を選ぶ。

4.3.3 要素係数行列, 要素自由項ベクトル

そこで

$$
\text{(12a)} \qquad \boldsymbol{u}_k := \begin{pmatrix} u_{k-1} \\ u_k \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_k := \begin{pmatrix} v_{k-1} \\ v_k \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_k := \begin{pmatrix} f_0^{(k)} \\ f_1^{(k)} \end{pmatrix},
$$

$$
\text{(12b)} \qquad A_k := \begin{pmatrix} A_{00}^{(k)} & A_{01}^{(k)} \\ A_{10}^{(k)} & A_{11}^{(k)} \end{pmatrix},
$$

$$
\text{(12c)} \qquad \boldsymbol{g}_m := \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}
$$

とおくと、次式が得られる。

$$
\text{(13)} \quad \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \boldsymbol{v}_k^\top A_k \boldsymbol{u}_k, \quad (f, \hat{v})_{e_k} = \boldsymbol{v}_k^\top \boldsymbol{f}_k \quad (k = 1, \cdots, m), \quad \beta \hat{v}(1) = \boldsymbol{v}_m^\top \boldsymbol{g}_m.
$$

ここで $^\top$ は転置 (transpose) を表す。$\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ である。

そこで

$$\text{(12a)} \qquad \boldsymbol{u}_k := \begin{pmatrix} u_{k-1} \\ u_k \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_k := \begin{pmatrix} v_{k-1} \\ v_k \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_k := \begin{pmatrix} f_0^{(k)} \\ f_1^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$\text{(12b)} \qquad A_k := \begin{pmatrix} A_{00}^{(k)} & A_{01}^{(k)} \\ A_{10}^{(k)} & A_{11}^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$\text{(12c)} \qquad \boldsymbol{g}_m := \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

とおくと、次式が得られる。

$$\text{(13)} \quad \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \boldsymbol{v}_k^\top A_k \boldsymbol{u}_k, \quad (f, \hat{v})_{e_k} = \boldsymbol{v}_k^\top \boldsymbol{f}_k \quad (k = 1, \cdots, m), \quad \beta \hat{v}(1) = \boldsymbol{v}_m^\top \boldsymbol{g}_m.$$

ここで $^\top$ は転置 (transpose) を表す。$\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ である。

$\boldsymbol{u}_k$, $\boldsymbol{v}_k$ は**要素節点パラメーター・ベクトル**、$\boldsymbol{f}_k$ は**要素自由項ベクトル**、A_k は**要素係数行列**と呼ばれる。

4.3.3 要素係数行列, 要素自由項ベクトル

後のために実際に A_k, $\boldsymbol{f}_k$ を求めよう。

$$\langle L_i, L_j \rangle_{e_k} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} L_i'(x) L_j'(x) dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\varepsilon}{(x_k - x_{k-1})^2} dx = \frac{\varepsilon}{x_k - x_{k-1}},$$

$$\varepsilon := \begin{cases} 1 & (i = j) \\ -1 & (i \neq j) \end{cases}$$

であるから、

$$A_k = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

4.3.3 要素係数行列, 要素自由項ベクトル

後のために実際に A_k, $\boldsymbol{f}_k$ を求めよう。

$$\langle L_i, L_j\rangle_{e_k} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} L_i'(x)L_j'(x)dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\varepsilon}{(x_k - x_{k-1})^2}dx = \frac{\varepsilon}{x_k - x_{k-1}},$$

$$\varepsilon := \begin{cases} 1 & (i = j) \\ -1 & (i \neq j) \end{cases}$$

であるから、

$$A_k = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

一方

$$f_j^{(k)} = (f, L_j)_{e_k} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)L_j(x)dx \quad (j = 0, 1).$$

この右辺の積分は、f に応じて何らかの手段 (例えば数値積分) で計算しておく。

4.3.3 要素係数行列, 要素自由項ベクトル

(このスライドは最初はスキップしても良い。)

f が複雑な関数の場合は、$f_j^{(k)}$ は厳密に計算できないかもしれないが、節点での値さえ分かれば近似計算 (数値積分) は難しくない。

4.3.3 要素係数行列, 要素自由項ベクトル

(このスライドは最初はスキップしても良い。)

f が複雑な関数の場合は、$f_j^{(k)}$ は厳密に計算できないかもしれないが、節点での値さえ分かれば近似計算 (数値積分) は難しくない。例えば

$$f \fallingdotseq f(x_{k-1})L_0 + f(x_k)L_1 \quad (\text{on } e_k)$$

と 1 次補間近似を利用して

$$f_j^{(k)} = (f, L_j)_{e_k} \fallingdotseq (f(x_{k-1})L_0 + f(x_k)L_1, L_j)_{e_k} = f(x_{k-1})(L_0, L_j)_{e_k} + f(x_k)(L_1, L_j)_{e_k}.$$

4.3.3 要素係数行列, 要素自由項ベクトル

(このスライドは最初はスキップしても良い。)

f が複雑な関数の場合は、$f_j^{(k)}$ は厳密に計算できないかもしれないが、節点での値さえ分かれば近似計算 (数値積分) は難しくない。例えば

$$f \fallingdotseq f(x_{k-1})L_0 + f(x_k)L_1 \quad (\text{on } e_k)$$

と 1 次補間近似を利用して

$$f_j^{(k)} = (f, L_j)_{e_k} \fallingdotseq (f(x_{k-1})L_0 + f(x_k)L_1, L_j)_{e_k} = f(x_{k-1})(L_0, L_j)_{e_k} + f(x_k)(L_1, L_j)_{e_k}.$$

$x = x_{k-1} + (x_k - x_{k-1})t$ $(0 \le t \le 1)$ と変数変換して

$$(L_0, L_0)_{e_k} = (L_1, L_1)_{e_k} = (x_k - x_{k-1}) \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{x_k - x_{k-1}}{3},$$

$$(L_0, L_1)_{e_k} = (L_0, L_1)_{e_k} = (x_k - x_{k-1}) \int_0^1 t(1-t) \, dt = \frac{x_k - x_{k-1}}{6}.$$

4.3.3 要素係数行列, 要素自由項ベクトル

(このスライドは最初はスキップしても良い。)

f が複雑な関数の場合は、$f_j^{(k)}$ は厳密に計算できないかもしれないが、節点での値さえ分かれば近似計算 (数値積分) は難しくない。例えば

$$f \fallingdotseq f(x_{k-1})L_0 + f(x_k)L_1 \quad (\mathrm{on}\ e_k)$$

と 1 次補間近似を利用して

$$f_j^{(k)} = (f, L_j)_{e_k} \fallingdotseq (f(x_{k-1})L_0 + f(x_k)L_1, L_j)_{e_k} = f(x_{k-1})(L_0, L_j)_{e_k} + f(x_k)(L_1, L_j)_{e_k}.$$

$x = x_{k-1} + (x_k - x_{k-1})t$ $(0 \le t \le 1)$ と変数変換して

$$(L_0, L_0)_{e_k} = (L_1, L_1)_{e_k} = (x_k - x_{k-1})\int_0^1 t^2\,dt = \frac{x_k - x_{k-1}}{3},$$

$$(L_0, L_1)_{e_k} = (L_0, L_1)_{e_k} = (x_k - x_{k-1})\int_0^1 t(1-t)\,dt = \frac{x_k - x_{k-1}}{6}.$$

ゆえに

$$\boldsymbol{f}_k \fallingdotseq \frac{(x_k - x_{k-1})}{6}\begin{pmatrix} 2f(x_{k-1}) + f(x_k) \\ f(x_{k-1}) + 2f(x_k) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

以下の話で必要になる式を再掲しておく。

弱形式は次のように書き直される。

$$\sum_{k=1}^{m}\langle \hat{u},\hat{v}\rangle_{e_k}=\sum_{k=1}^{m}(f,\hat{v})_{e_k}+\beta\hat{v}(1)\quad(\hat{v}\in\hat{X}) \tag{16}$$

$\boldsymbol{u}_k=\begin{pmatrix}u_{k-1}\\u_k\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_k=\begin{pmatrix}v_{k-1}\\v_k\end{pmatrix}$, さらに $\boldsymbol{f}_k$, A_k, $\boldsymbol{g}_m$ を適当に定義すると

$$\langle \hat{u},\hat{v}\rangle_{e_k}=\boldsymbol{v}_k^\top A_k\boldsymbol{u}_k,\quad (f,\hat{v})_{e_k}=\boldsymbol{v}_k^\top\boldsymbol{f}_k\quad(k=1,\cdots,m),\quad \beta\hat{v}(1)=\boldsymbol{v}_m^\top\boldsymbol{g}_m.$$

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

(12a), (12b), (12c) で与えたベクトル、行列を $m+1$ 次元に拡大する。まず

$$\boldsymbol{u} := \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

とおく。繰り返しになるが、$u_i = \hat{u}(x_i)$, $v_i = \hat{v}(x_i)$.

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

(12a), (12b), (12c) で与えたベクトル、行列を $m+1$ 次元に拡大する。まず

$$\boldsymbol{u} := \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

とおく。繰り返しになるが、$u_i = \hat{u}(x_i)$, $v_i = \hat{v}(x_i)$.

$\boldsymbol{f}_k$, A_k, $\boldsymbol{g}^*_m$ については、0 を補って、$\mathbb{R}^{m+1}$, $M(m+1;\mathbb{R})$ の元に拡大する:

$$\boldsymbol{f}^*_k := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_0^{(k)} \\ f_1^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^*_k := \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \\ \hline 0 & A_{00}^{(k)} & A_{01}^{(k)} & 0 \\ & A_{10}^{(k)} & A_{11}^{(k)} & \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \end{array}\right) \quad (k = 1, \cdots, m), \quad \boldsymbol{g}^*_m := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

(12a), (12b), (12c) で与えたベクトル、行列を $m+1$ 次元に拡大する。まず

$$\boldsymbol{u} := \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

とおく。繰り返しになるが、$u_i = \hat{u}(x_i)$, $v_i = \hat{v}(x_i)$.

$\boldsymbol{f}_k$, A_k, $\boldsymbol{g}_m^*$ については、0 を補って、$\mathbb{R}^{m+1}$, $M(m+1;\mathbb{R})$ の元に拡大する:

$$\boldsymbol{f}_k^* := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_0^{(k)} \\ f_1^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_k^* := \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \\ \hline 0 & A_{00}^{(k)} & A_{01}^{(k)} & 0 \\ & A_{10}^{(k)} & A_{11}^{(k)} & \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \end{array}\right) \quad (k = 1, \cdots, m), \quad \boldsymbol{g}_m^* := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

これらを用いると ($\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \boldsymbol{v}_k^\top A_k \boldsymbol{u}_k$, $(f, \hat{v})_{e_k} \fallingdotseq \boldsymbol{v}_k^\top f_k$ であるから)

(17) $$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \boldsymbol{v}^\top A_k^* \boldsymbol{u}, \quad (f, \hat{v})_{e_k} = \boldsymbol{v}^\top f_k^* \quad (k = 1, 2, \cdots, m), \quad \beta \hat{v}(1) = \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{g}_m^*.$$

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

(17) を用いると、弱形式を書き直した (16) はさらに次のように書き直される。

(18)
$$\sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{v}^\top A_k^* \boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{f}_k^* + \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{g}_m^* \quad (\boldsymbol{v} \in Y).$$

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

(17) を用いると、弱形式を書き直した (16) はさらに次のように書き直される。

(18) $$\sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{v}^\top A_k^* \boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{f}_k^* + \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{g}_m^* \quad (\boldsymbol{v} \in Y).$$

ここで Y は、$\hat{v} = \sum_{i=0}^{m} v_i \phi_i$ が $\hat{X}$ に属するような $\boldsymbol{v} = (v_0, \cdots, v_m)^\top$ の全体、すなわち

$$Y = \left\{ (v_0, v_1, \cdots, v_m)^\top \in \mathbb{R}^{m+1} \;\middle|\; v_0 = 0 \right\}.$$

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

(17) を用いると、弱形式を書き直した (16) はさらに次のように書き直される。

$$\sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{v}^\top A_k^* \boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{f}_k^* + \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{g}_m^* \quad (\boldsymbol{v} \in Y). \tag{18}$$

ここで Y は、$\hat{v} = \sum_{i=0}^{m} v_i \phi_i$ が $\hat{X}$ に属するような $\boldsymbol{v} = (v_0, \cdots, v_m)^\top$ の全体、すなわち

$$Y = \left\{ (v_0, v_1, \cdots, v_m)^\top \in \mathbb{R}^{m+1} \;\middle|\; v_0 = 0 \right\}.$$

(18) は

$$\boldsymbol{v}^\top \left(\sum_{k=1}^{m} A_k^* \right) \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}^\top \left(\sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{f}_k^* + \boldsymbol{g}_m^* \right) \quad (\boldsymbol{v} \in Y)$$

と書き直せる。

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

(17) を用いると、弱形式を書き直した (16) はさらに次のように書き直される。

(18)
$$\sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{v}^\top A_k^* \boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{f}_k^* + \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{g}_m^* \quad (\boldsymbol{v} \in Y).$$

ここで Y は、$\hat{v} = \sum_{i=0}^{m} v_i \phi_i$ が $\hat{X}$ に属するような $\boldsymbol{v} = (v_0, \cdots, v_m)^\top$ の全体、すなわち

$$Y = \left\{ (v_0, v_1, \cdots, v_m)^\top \in \mathbb{R}^{m+1} \;\middle|\; v_0 = 0 \right\}.$$

(18) は

$$\boldsymbol{v}^\top \left(\sum_{k=1}^{m} A_k^* \right) \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}^\top \left(\sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{f}_k^* + \boldsymbol{g}_m^* \right) \quad (\boldsymbol{v} \in Y)$$

と書き直せる。ゆえに

(19)
$$\boldsymbol{A}^* := \sum_{k=1}^{m} A_k^*, \quad \boldsymbol{f}^* := \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{f}_k^* + \boldsymbol{g}_m^*$$

とおけば

$$\boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{A}^* \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{f}^* \quad (\boldsymbol{v} \in Y).$$

すなわち

(20)
$$\boldsymbol{v}^\top (\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}^*) = 0 \quad (\boldsymbol{v} \in Y).$$

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

(再掲 20) $$\boldsymbol{v}^\top(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}^*) = 0 \quad (\boldsymbol{v} \in Y).$$

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

(再掲 20) $\quad \boldsymbol{v}^\top (\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}^*) = 0 \quad (\boldsymbol{v} \in Y).$

これは次と同値である。

$$\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f} \in Y^\perp = \left\{ (\lambda, 0, \cdots, 0)^\top \in \mathbb{R}^{m+1} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

(再掲 20) $$\boldsymbol{v}^\top (\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}^*) = 0 \quad (\boldsymbol{v} \in Y).$$

これは次と同値である。

$$\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f} \in Y^\perp = \left\{ (\lambda, 0, \cdots, 0)^\top \in \mathbb{R}^{m+1} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

つまりは

$$(\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}^*) \text{ の最初の成分以外} = 0.$$

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

(再掲 20) $$\boldsymbol{v}^\top(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{u}-\boldsymbol{f}^*)=0 \quad (\boldsymbol{v}\in Y).$$

これは次と同値である。

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{u}-\boldsymbol{f}\in Y^\perp=\left\{(\lambda,0,\cdots,0)^\top\in\mathbb{R}^{m+1}\;\middle|\;\lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

つまりは

$$(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{u}-\boldsymbol{f}^*)\text{ の最初の成分以外}=0.$$

すなわち

(21) $$A^{**}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}^{**}.$$

ここで

$A^{**}:=\boldsymbol{A}^*$ の第 0 行を除いた $m\times(m+1)$ 行列,

$\boldsymbol{f}^{**}:=\boldsymbol{f}^*$ の第 0 成分を除いた m 次元縦ベクトル.

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

(再掲 20) $$\boldsymbol{v}^\top (\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}^*) = 0 \quad (\boldsymbol{v} \in Y).$$

これは次と同値である。

$$\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f} \in Y^\perp = \left\{ (\lambda, 0, \cdots, 0)^\top \in \mathbb{R}^{m+1} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

つまりは

$$(\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}^*) \text{ の最初の成分以外} = 0.$$

すなわち

(21) $$A^{**} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}^{**}.$$

ここで

$$A^{**} := \boldsymbol{A}^* \text{ の第 0 行を除いた } m \times (m+1) \text{ 行列},$$
$$\boldsymbol{f}^{**} := \boldsymbol{f}^* \text{ の第 0 成分を除いた } m \text{ 次元縦ベクトル}.$$

(この段階で、係数行列 A^{**} は正方行列ではない。しかし $\boldsymbol{u}$ の成分のうち u_0 は分かっていて未知ではない: $u_0 = \widehat{u}(0) = \alpha$. その部分を右辺に移項することができ、そうすると正方行列係数の方程式が出来る)

部分配列を表すための MATLAB 風の記法を使うと、$A^{**} = A^*(1:m, 0:m)$, $\boldsymbol{f}^{**} = \boldsymbol{f}^*(1:m)$ と書ける。この記法は便利なので以下でも使うことにする。

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

ところで $u_0 = \alpha$ は分かっているので、以下、u_0 の消去 (右辺への移項) を実行する。

$$\boldsymbol{u}^* := \boldsymbol{u} \text{ の第 0 成分を除いた } m \text{ 次元縦ベクトル} = (u_1, \cdots, u_m)^\top$$

$$\text{i.e.} \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \boldsymbol{u}^* \end{pmatrix},$$

$$A := A^{**} \text{ の第 0 列を除いた } m \text{ 次正方行列}$$

$$\text{i.e.} \quad A^{**} = \left(\begin{array}{c|c} A^*_{10} & \\ \vdots & A \\ A^*_{m0} & \end{array}\right), \quad A := \begin{pmatrix} A^*_{11} & \cdots & A^*_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A^*_{m1} & \cdots & A^*_{mm} \end{pmatrix}$$

とおくと

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

ところで $u_0 = \alpha$ は分かっているので、以下、u_0 の消去 (右辺への移項) を実行する。

$$\boldsymbol{u}^* := \boldsymbol{u} \text{ の第 0 成分を除いた } m \text{ 次元縦ベクトル} = (u_1, \cdots, u_m)^\top$$

$$\text{i.e.} \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \boldsymbol{u}^* \end{pmatrix},$$

$$A := A^{**} \text{ の第 0 列を除いた } m \text{ 次正方行列}$$

$$\text{i.e.} \quad A^{**} = \left(\begin{array}{c|c} A^*_{10} & \\ \vdots & A \\ A^*_{m0} & \end{array} \right), \quad A := \begin{pmatrix} A^*_{11} & \cdots & A^*_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A^*_{m1} & \cdots & A^*_{mm} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$A^{**}\boldsymbol{u} = \left(\begin{array}{c|c} A^*_{10} & \\ \vdots & A \\ A^*_{m0} & \end{array} \right) \left(\frac{\alpha}{\boldsymbol{u}^*} \right) = \begin{pmatrix} A^*_{10} \\ \vdots \\ A^*_{m0} \end{pmatrix} \alpha + A\boldsymbol{u}^* = \alpha \begin{pmatrix} A^*_{10} \\ \vdots \\ A^*_{m0} \end{pmatrix} + A\boldsymbol{u}^*.$$

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

ところで $u_0 = \alpha$ は分かっているので、以下、u_0 の消去 (右辺への移項) を実行する。

$$\boldsymbol{u}^* := \boldsymbol{u} \text{ の第 0 成分を除いた } m \text{ 次元縦ベクトル} = (u_1, \cdots, u_m)^\top$$

$$\text{i.e.} \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \boldsymbol{u}^* \end{pmatrix},$$

$$A := A^{**} \text{ の第 0 列を除いた } m \text{ 次正方行列}$$

$$\text{i.e.} \quad A^{**} = \left(\begin{array}{c|c} A^*_{10} & \\ \vdots & A \\ A^*_{m0} & \end{array}\right), \quad A := \begin{pmatrix} A^*_{11} & \cdots & A^*_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A^*_{m1} & \cdots & A^*_{mm} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$A^{**}\boldsymbol{u} = \left(\begin{array}{c|c} A^*_{10} & \\ \vdots & A \\ A^*_{m0} & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \alpha \\ \hline \boldsymbol{u}^* \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A^*_{10} \\ \vdots \\ A^*_{m0} \end{pmatrix} \alpha + A\boldsymbol{u}^* = \alpha \begin{pmatrix} A^*_{10} \\ \vdots \\ A^*_{m0} \end{pmatrix} + A\boldsymbol{u}^*.$$

$$\boldsymbol{f} := \boldsymbol{f}^{**} - \alpha \begin{pmatrix} A^*_{10} \\ \vdots \\ A^*_{mn} \end{pmatrix}$$ とおけば、(21) $A^{**}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}^{**}$ は $A\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{f}$ に書き換えられる。

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

以上のように、局所的な (要素の) 情報から方程式を組み立てる操作を**直接剛性法** (direct stiffness method) という。

(参考情報: 「直接剛性法」は、有限要素法の直接のルーツである**構造力学**に由来する用語である。構造力学の問題において、A は剛性行列という名前が付いている。)

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

以上のように、局所的な (要素の) 情報から方程式を組み立てる操作を**直接剛性法** (direct stiffness method) という。

(参考情報: 「直接剛性法」は、有限要素法の直接のルーツである**構造力学**に由来する用語である。構造力学の問題において、A は剛性行列という名前が付いている。)

次のことを覚えておくとよい。

- 係数行列は Dirichlet 境界条件を課す節点の節点番号の行と列を除いたもの
- Dirichlet 境界条件の情報は右辺のベクトルに組み込む
- 未知数は節点パラメーターであり、基底関数は節点に対応して作る

4.3.5 具体的にすることのまとめ (1枚で十分)

第 1 段　各要素 e_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ について、A_k, $\boldsymbol{f}_k$ を求める:

$$A_k = \begin{pmatrix} \langle L_0, L_0 \rangle_{e_k} & \langle L_1, L_0 \rangle_{e_k} \\ \langle L_0, L_1 \rangle_{e_k} & \langle L_1, L_1 \rangle_{e_k} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_k = \begin{pmatrix} f(x_{k-1})(L_0, L_0)_{e_k} + f(x_k)(L_1, L_0)_{e_k} \\ f(x_{k-1})(L_0, L_1)_{e_k} + f(x_k)(L_1, L_1)_{e_k} \end{pmatrix},$$

$$\langle L_j, L_i \rangle_{e_k} = \begin{cases} \dfrac{1}{x_k - x_{k-1}} & (i = j) \\ -\dfrac{1}{x_k - x_{k-1}} & (i \neq j), \end{cases} \qquad (L_j, L_i)_{e_k} = \begin{cases} \dfrac{x_k - x_{k-1}}{3} & (i = j) \\ \dfrac{x_k - x_{k-1}}{6} & (i \neq j) \end{cases}$$

を計算して、

4.3.5 具体的にすることのまとめ (1 枚で十分)

第 1 段　各要素 e_k $(k=1,2,\dots,m)$ について、A_k, $\boldsymbol{f}_k$ を求める:

$$A_k=\begin{pmatrix}\langle L_0,L_0\rangle_{e_k} & \langle L_1,L_0\rangle_{e_k}\\ \langle L_0,L_1\rangle_{e_k} & \langle L_1,L_1\rangle_{e_k}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{f}_k=\begin{pmatrix}f(x_{k-1})(L_0,L_0)_{e_k}+f(x_k)(L_1,L_0)_{e_k}\\ f(x_{k-1})(L_0,L_1)_{e_k}+f(x_k)(L_1,L_1)_{e_k}\end{pmatrix},$$

$$\langle L_j,L_i\rangle_{e_k}=\begin{cases}\dfrac{1}{x_k-x_{k-1}} & (i=j)\\ -\dfrac{1}{x_k-x_{k-1}} & (i\neq j),\end{cases}\qquad (L_j,L_i)_{e_k}=\begin{cases}\dfrac{x_k-x_{k-1}}{3} & (i=j)\\ \dfrac{x_k-x_{k-1}}{6} & (i\neq j)\end{cases}$$

を計算して、それを $m+1$ 次正方行列 A_k^*, $m+1$ 次元ベクトル $\boldsymbol{f}_k^*$ に拡大して、

$$A^*:=\sum_{k=1}^m A_k^*,\quad \boldsymbol{f}^*:=\sum_{k=1}^m \boldsymbol{f}_k^*+\boldsymbol{g}_m^*,$$

それから

$$A:=A^*(1:m,1:m),\quad \boldsymbol{f}^{**}:=\boldsymbol{f}^*(1:m),\quad \boldsymbol{f}:=\boldsymbol{f}^{**}-\alpha\begin{pmatrix}A_{10}\\ \vdots\\ A_{m0}\end{pmatrix}.$$

4.3.5 具体的にすることのまとめ (1 枚で十分)

第 1 段　各要素 e_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ について、A_k, $\boldsymbol{f}_k$ を求める:

$$A_k = \begin{pmatrix} \langle L_0, L_0\rangle_{e_k} & \langle L_1, L_0\rangle_{e_k} \\ \langle L_0, L_1\rangle_{e_k} & \langle L_1, L_1\rangle_{e_k} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_k = \begin{pmatrix} f(x_{k-1})(L_0, L_0)_{e_k} + f(x_k)(L_1, L_0)_{e_k} \\ f(x_{k-1})(L_0, L_1)_{e_k} + f(x_k)(L_1, L_1)_{e_k} \end{pmatrix},$$

$$\langle L_j, L_i\rangle_{e_k} = \begin{cases} \dfrac{1}{x_k - x_{k-1}} & (i = j) \\ -\dfrac{1}{x_k - x_{k-1}} & (i \neq j), \end{cases} \qquad (L_j, L_i)_{e_k} = \begin{cases} \dfrac{x_k - x_{k-1}}{3} & (i = j) \\ \dfrac{x_k - x_{k-1}}{6} & (i \neq j) \end{cases}$$

を計算して、それを $m+1$ 次正方行列 A_k^*, $m+1$ 次元ベクトル $\boldsymbol{f}_k^*$ に拡大して、

$$A^* := \sum_{k=1}^{m} A_k^*, \quad \boldsymbol{f}^* := \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{f}_k^* + \boldsymbol{g}_m^*,$$

それから

$$A := A^*(1:m, 1:m), \quad \boldsymbol{f}^{**} := \boldsymbol{f}^*(1:m), \quad \boldsymbol{f} := \boldsymbol{f}^{**} - \alpha \begin{pmatrix} A_{10} \\ \vdots \\ A_{m0} \end{pmatrix}.$$

第 2 段　連立 1 次方程式 $A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}$ を解いて $u_1, \cdots, u_m$ を求めて

$$\hat{u} = \alpha\phi_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i \psi_i.$$

4.4 連立 1 次方程式の具体形

$\overline{\Omega} = \overline{(0,1)} = [0,1]$ を 4 等分して、各小区間を有限要素と考える。つまり $m = 4$ で

$$x_i := ih \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4),$$

ただし $h = 1/4$. そして

$$e_k := [x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

すると

$$A_k = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}_k = \begin{pmatrix} f_0^{(k)} \\ f_1^{(k)} \end{pmatrix}, \quad f_j^{(k)} = \int_{e_k} f(x) L_j(x)\, dx \quad (L_j \text{ は } k \text{ によるので記号が変}),$$

$$\boldsymbol{g}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

特に (簡単のため) $f(x) \equiv \overline{f}$ (定数関数) とすると、

$$f_j^{(k)} = \frac{\overline{f} h}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.4 連立 1 次方程式の具体形

$$
\begin{aligned}
A^* &= A_1^* + A_2^* + A_3^* + A_4^* \\
&= \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}^* &= \boldsymbol{f}_1^* + \boldsymbol{f}_2^* + \boldsymbol{f}_3^* + \boldsymbol{f}_4^* + \boldsymbol{g}_4^* \\
&= \frac{\bar{f}h}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\bar{f}h}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\bar{f}h}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\bar{f}h}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \\
&= \bar{f}h\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

4.4 連立 1 次方程式の具体形

最後に $u_0 = u(0) = \alpha$ を代入して u_0 を消去すると

$$\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \bar{f}h\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha/h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4.4 連立 1 次方程式の具体形

最後に $u_0 = u(0) = \alpha$ を代入して u_0 を消去すると

$$\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \bar{f}h\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha/h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

この最後の方程式は、(仮想格子点を導入して、Neumann 境界条件を中心差分近似した) 差分法で得られる連立 1 次方程式と同じである。つまり

- 規則的な有限要素分割をしたとき、有限要素法は差分法と近い。
- 差分法で自明でない工夫 (仮想格子点の導入) をして得られた Neumann 境界条件の近似に相当することが、有限要素法ではごく自然に得られる。有限要素法は Neumann 境界条件の近似に強い。

4.4 連立 1 次方程式の具体形

(おまけ) 最後に、境界条件を ($u(0)=\alpha$, $u'(1)=\beta$ から)

$$u(0)=\alpha, \quad u(1)=\beta$$

に替えた、Dirichlet 境界値問題を調べておこう。この場合は、次の連立 1 次方程式が得られる。

$$\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \overline{f} h \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha/h \\ 0 \\ \beta/h \end{pmatrix}.$$

以下に紹介する C プログラム fem1d.c は

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/program/fem/fem1d.c

に置いてある (現象数理学科 Mac ならば、ターミナルから

```
curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/program/fem/fem1d.c
```

で入手できる)。

このプログラムが対象としている問題は、$f \equiv 1$ で、境界条件は同次、すなわち $\alpha = \beta = 0$ の場合である。具体的に書き下すと

$$-u'' = 1, \quad u(0) = u'(1) = 0. \tag{22}$$

この問題の厳密解は $u(x) = x(2-x)/2$ である。

4.5.2 プログラムの解説

- `main()` を読むと分かるように、最初に
  - `nnode` 総節点数 (the number of nodes)
  - `nelmt` 総要素数 (the number of elements)
  - `nbc` ディリクレ境界にある接点の個数 (1 または 2)
  - `x[]` 節点の座標
  - `ibc` ディリクレ境界にある接点の節点番号

  を決めている。
- 連立 1 次方程式を構成するのは、関数 `assem()` で行っている (assemblage)。作業内容は 3 つに分かれる。
  1. `am`, `fm` を 0 クリアする。
  2. すべての有限要素について、要素係数行列 `ae`, 要素自由ベクトル `fe` を関数 `ecm()` で計算して (element coefficient matrix)、それぞれ全体係数行列 `am`、全体自由項ベクトル `fm` に算入する。
  3. ディリクレ境界上にある節点に対応する部分を修正する。

4.5.2 プログラムの解説

- `ecm()` で必要となる事項の復習。$e_k = [x_{k-1}, x_k]$ とすると、

$$A_k = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_k = \begin{pmatrix} (f, L_0)_{e_k} \\ (f, L_1)_{e_k} \end{pmatrix}$$

であったが、f は

$$f(x) \fallingdotseq f(x_{k-1})L_0(x) + f(x_k)L_1(x) \quad (x \in e_k)$$

と 1 次近似することにすれば、

$$(f, L_j)_{e_k} \fallingdotseq (f(x_{k-1})L_0 + f(x_k)L_1, L_j)_{e_k} = f(x_{k-1})(L_0, L_j)_{e_k} + f(x_k)(L_1, L_j)_{e_k}.$$

ここで

$$(L_0, L_0)_{e_k} = (L_1, L_1)_{e_k} = (x_k - x_{k-1}) \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x_k - x_{k-1}}{3},$$

$$(L_0, L_1)_{e_k} = (L_1, L_0)_{e_k} = (x_k - x_{k-1}) \int_0^1 x(1-x)\,dx = \frac{x_k - x_{k-1}}{6}$$

であるから、

$$\boldsymbol{f}_k \fallingdotseq \frac{x_k - x_{k-1}}{6} \begin{pmatrix} 2f(x_{k-1}) + f(x_k) \\ f(x_{k-1}) + 2f(x_k) \end{pmatrix}.$$

4.5.3 実験

fem1d.c のコンパイル&実行& gnuplot によるグラフ描画

```
$ cc -o fem1d fem1d.c
$ ./fem1d
nodal values of u (節点での u の値)
   i      u        i      u        i      u
   0   0.000e+00   1   9.500e-02   2   1.800e-01
   3   2.550e-01   4   3.200e-01   5   3.750e-01
   6   4.200e-01   7   4.550e-01   8   4.800e-01
   9   4.950e-01  10   5.000e-01
$ cat fem1d.out
0.000000 0.000000
0.100000 0.095000
0.200000 0.180000
0.300000 0.255000
0.400000 0.320000
0.500000 0.375000
0.600000 0.420000
0.700000 0.455000
0.800000 0.480000
0.900000 0.495000
1.000000 0.500000
$ gnuplot
gnuplot> plot "fem1d.out" with lp, x*(2-x)/2
```

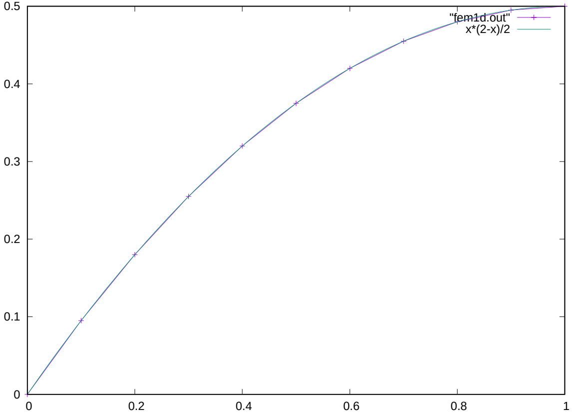

図 1: fem1d.c の計算結果 (m=10) と厳密解 $\frac{x(2-x)}{2}$ のグラフを重ね書き

4.5.4 練習問題

FreeFem++ のようなソフトウェアは非常に便利で、有限要素法のプログラムの多くが少ない手間で記述できるが、そうでない場合もあり、自分でプログラミングする必要がなくなった訳ではない。

それをする場合は、今回説明したようなこと (要素係数行列とか直接剛性法とか) を理解して、いざとなったら自分で実装できるようになる必要がある。そういうレベルまで理解するには、以下を実現するようにプログラムを書き換えるのは良い練習課題となるだろう。

1. 両側ディリクレ条件 $u(0) = u(1) = 0$ の問題を解く。
2. 非同次ディリクレ条件 $u(0) = \alpha$ の問題を解く。
3. 非同次 Neumann 条件 $u'(1) = \beta$ の問題を解く。
4. $-(pu')' = f$ という一般の楕円型方程式の問題を解く。
   (p は $\min_x p(x) > 0$ を満たす既知の関数)

参考文献

[1] 菊地文雄：有限要素法概説, サイエンス社 (1980), 新訂版 1999.