

# 応用数値解析特論 第3回

～Ritz-Galerkin 法～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/ana2021/>

2021年10月4日

# 目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 Poisson 方程式の境界値問題に対する Ritz-Galerkin 法
  - Galerkin 法
    - $X_{g_1}$ ,  $X$  の有限次元近似
    - 問題 ( $\widehat{W}$ )
    - 問題 ( $\widehat{W}'$ )
    - 連立 1 次方程式の導出
    - 連立 1 次方程式の一意可解性
  - Ritz 法
    - 問題 ( $\widehat{V}'$ )
  - 誤差最小の原理
  - 古典的 Ritz-Galerkin 法
  - 新しい Ritz-Galerkin 法としての有限要素法
- 3 参考文献

- 菊地 [1] の第 3 章「Ritz-Galerkin 法」の内容を解説する。
- 10 月 11 日 (月曜) から、明治大学は活動制限指針レベル 1 となる。この講義はレベル 1 の間は対面 (教室は 506 教室) で行う。体調不良などの理由で欠席した人向けに Zoom ミーティングで配信する。また講義は板書でなくスライドを用いて行い、その PDF を公開する。
- 質問用の Zoom オフィスアワーを火曜 12:00–13:00 に設ける。参加するための情報は「シラバスの補足」に書いておく。(レベル 2 に戻った場合、曜日時間を変更するかもしれない。)

### 3 Poisson 方程式の境界値問題に対する Ritz-Galerkin 法

前回の講義で、Poisson 方程式の境界値問題を題材にして、弱定式化 (弱解の方法) を説明し、(最小型) 変分原理が成り立つことを確認した。

今回は、同じ問題を題材に、Ritz-Galerkin 法 という近似解法を説明する。有限要素法は、Ritz-Galerkin 法 の一種である、といえる。

先走って、もう少し詳しく説明すると次のようになる。

Ritz-Galerkin 法は、前回解説した弱解の方法の応用であると言える。

弱解の方法とは、微分方程式の境界値問題 (P) を考察するため、それを Euler-Lagrange 方程式とする変分問題 (V) やそれと同値な問題 (W) (弱形式で記述される) を導いて議論する、というものであった。

Ritz-Galerkin 法は、(V) や (W) を有限次元近似した問題 ( $\hat{V}$ ), ( $\hat{W}$ ) の解を、もとの問題 (P) の近似解に採用する、というものである。

変分問題の近似解法として、有名な Rayleigh などの研究 (“Theory of Sound” [2], [3]) もあったが、完成したのは Ritz である (Ritz の方法, Ritz [4])。

私が勉強しはじめの頃は、Rayleigh-Ritz の方法とか、Rayleigh のみの名前がついたりしていた。Rayleigh 卿 (John William Strutt, “third Baron Rayleigh”, “Lord Rayleigh”, 1842–1919) は長生きした大物理学者、Ritz (Walter Ritz, 1878–1909) は若くしてなくなったという事情もあって、Ritz の名前は軽んじられ、そしてそれが孫引きされていたような気配が感じられる。

## 3.1 Galerkin 法 3.1.1 $X_{g_1}$ , $X$ の有限次元近似

弱解の有限次元近似版として微分方程式の近似解を求めよう、というのが **Galerkin 法** である。

いくつかの関数を選び、その 1 次結合で  $u$  や  $v$  の近似関数を作る。より具体的には関数空間  $X_{g_1}$ ,  $X$  の有限次元近似  $\hat{X}_{g_1}$ ,  $\hat{X}$  を作るため

$$(1) \quad \hat{g}_1 := g_1 \quad \text{on } \Gamma_1$$

$$(2) \quad \psi_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

となる  $\hat{g}_1$  と、1 次独立な  $\psi_i \in X$  ( $i = 1, \dots, m$ ) を適当に選び、

$$(3) \quad \hat{X}_{g_1} := \left\{ \hat{g}_1 + \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \mid (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m \right\},$$

$$(4) \quad \hat{X} := \left\{ \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \mid (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m \right\}$$

とおく。以下  $\{\psi_i\}$  のことを**基底関数** (basis functions) と呼ぶ。

## 3.1 Galerkin 法 3.1.2 問題 ( $\hat{W}$ )

Poisson 方程式の境界値問題 (P) の解  $u$  を  $\hat{X}_{g_1}$  の要素  $\hat{u}$  で近似することを考える。弱形式 (W) を思い浮かべて、

問題 ( $\hat{W}$ )

Find  $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$  s.t.

$$(5) \quad \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

という問題を考える。ちなみに、この分野の言葉遣いでは、 $\hat{u}$  を**試行関数 (trial function)**,  $\hat{v}$  を**試験関数 (test function)** と呼ぶ。

### 余談 1 (重み付き残差法)

ここでは試験関数の空間  $\hat{X}$  として、試行関数の空間  $\hat{X}_{g_1}$  とよく似たもの (ともに  $\psi_i$  で張られている) を採用したが、これは絶対必要というわけではない。実際に色々なものが使われている (もっとも、その場合は、Galerkin 法ではなく、**重み付き残差法 (method of weighted residuals, weighted residual methods)** と呼ばれることが多い)。この意味で Galerkin 法は、後で説明する Ritz 法よりも広い方法である、とすることが出来る。

## 3.1 Galerkin 法 3.1.3 問題 ( $\widehat{W}'$ )

問題 ( $\widehat{W}$ ) の方程式 (5) が  $\hat{v} \in \hat{X}$  につき線形で、 $\hat{X}$  が  $\{\psi\}_{i=1,2,\dots,m}$  で張られることから、( $\widehat{W}$ ) は、次の問題 ( $\widehat{W}'$ ) と同値であることが分かる。

問題 ( $\widehat{W}'$ )

Find  $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$  s.t.

$$(6) \quad \langle \hat{u}, \psi_i \rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

実際、 $\psi_i \in \hat{X}$  であるから、 $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$  が、(5) を満たすならば、(6) を満たす。逆に  $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$  が (6) を満たすならば、任意の  $a_i$  をかけて  $i$  について加えることで

$$\sum_{i=1}^m a_i \langle \hat{u}, \psi_i \rangle = \sum_{i=1}^m a_i (f, \psi_i) + \sum_{i=1}^m a_i [g_2, \psi_i].$$

内積の線形性から

$$\langle \hat{u}, \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \rangle = \left( f, \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \right) + \left[ g_2, \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \right].$$

これは (5) が成り立つことを意味する。

□

## 3.1 Galerkin 法 3.1.4 連立 1 次方程式の導出

方程式 (6) は、ある連立 1 次方程式と同値であることを示そう。 $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$  であるから、ある  $a_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) が存在して

$$\hat{u} = \hat{g}_1 + \sum_{j=1}^m a_j \psi_j$$

と表せる。これを (6) に代入すると

$$\langle \hat{g}_1 + \sum_{j=1}^m a_j \psi_j, \psi_i \rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

すなわち

$$(7) \quad \langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle + \sum_{j=1}^m a_j \langle \psi_j, \psi_i \rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

この (7) を行列とベクトルで表示すると

$$\begin{pmatrix} \langle \psi_1, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \psi_1, \psi_m \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_m \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \psi_1) + [g_2, \psi_1] - \langle \hat{g}_1, \psi_1 \rangle \\ \vdots \\ (f, \psi_m) + [g_2, \psi_m] - \langle \hat{g}_1, \psi_m \rangle \end{pmatrix}.$$

### 3.1.4 連立1次方程式の導出

ゆえに

$$(8) \quad \mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{f},$$

ただし、

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \langle \psi_1, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \psi_1, \psi_m \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_m \rangle \end{pmatrix} = (\langle \psi_j, \psi_i \rangle),$$

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = (a_i),$$

$$\mathbf{f} := \begin{pmatrix} (f, \psi_1) + [g_2, \psi_1] - \langle \hat{g}_1, \psi_1 \rangle \\ \vdots \\ (f, \psi_m) + [g_2, \psi_m] - \langle \hat{g}_1, \psi_m \rangle \end{pmatrix} = ((f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] - \langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle).$$

$f, g_2, \hat{g}_1, \{\psi_i\}$  が与えられれば  $\mathbf{A}, \mathbf{f}$  は定まる。 $\mathbf{u}$  は未知ベクトルである。  
この連立1次方程式 (8) が解を持つかどうか、次の命題で一般的に解決する。

## 補題 3.1 (Galerkin 法の一意可解性)

$\Gamma_1 \neq \emptyset$  で、 $\{\psi_i\}$  は 1 次独立とする。このとき  $A$  は正値対称である。ゆえに連立 1 次方程式 (8) は一意可解である。

復習: 実対称行列  $A$  に対して、 $A$  が正値  $\stackrel{\text{def}}{=} A$  の固有値がすべて正 ( $\Leftrightarrow (\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}) \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} > 0$ ). 特に正値対称行列は正則である。

( $\{\psi_j\}$  を 1 次独立に取るのは、基底とするために当然である。一方、 $\Gamma_1 \neq \emptyset$  は、もとの問題の解の一意性のために必要であるから、これも自然な条件である。)

**証明**  $A$  の対称性 ( $\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \langle \psi_j, \psi_i \rangle$ ) は明らかである。 $A$  の正値性を示す。任意の  $\mathbf{b} = (b_1 \cdots b_m)^\top \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$  に対して

$$\hat{v} := \sum_{j=1}^m b_j \psi_j$$

とおくと、 $\psi_j$  の 1 次独立性から  $\hat{v} \neq \mathbf{0}$  であり、実は  $\|\hat{v}\| > 0$  である。  
( $\because$  もしも  $\|\hat{v}\| = 0$  ならば、 $\|\cdot\|$  の定義から、 $\hat{v}$  は定数関数であるが、 $\Gamma_1 \neq \emptyset$  から、 $\hat{v}$  は少なくとも 1 点 ( $\Gamma_1$  の任意の点) で 0 に等しく、 $\hat{v} \equiv 0$  が導かれ、矛盾が生じる。)

## 3.1 Galerkin 法 3.1.5 連立 1 次方程式の一意可解性

ゆえに

$$0 < \|\hat{v}\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^m b_j \psi_j, \sum_{i=1}^m b_i \psi_i \right\rangle = \sum_{i=1}^m b_i \left( \sum_{j=1}^m \langle \psi_j, \psi_i \rangle b_j \right) = \mathbf{b}^\top \mathbf{A} \mathbf{b}$$

となる。従って  $\mathbf{A}$  は正値である。 □

### 注意 3.2 (記号 $\mathbf{b}^\top \mathbf{a}$ )

ここで  $\mathbf{b}^\top$  は、縦ベクトル  $\mathbf{b}$  を転置して出来る横ベクトルである。ゆえに  $\mathbf{b}^\top \mathbf{a}$  は、ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  の内積に他ならない。この文書では、色々な内積が登場するので、それらを明確に区別するために、記号を使い分けている。同様に  $\mathbb{C}^m$  において、 $\mathbf{b}^* \mathbf{a}$  は  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の内積である。

## 3.1 Galerkin 法 整理 — そんなにややこしい話ではない

並べてみる (本来こういうのは各自がすべきであるけれど、サービスする)。

問題 (W)

Find  $u \in X_{g_1}$  s.t.

(前回 10)  $\langle u, v \rangle = (f, v) + [g_2, v] \quad (v \in X).$

問題 ( $\widehat{W}$ )

Find  $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$  s.t.

(再掲 5)  $\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$

問題 ( $\widehat{W}'$ )

Find  $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$  s.t.

(再掲 6)  $\langle \hat{u}, \psi_i \rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \dots, m).$

(再掲 8)

$$Aa = f.$$

## 3.2 Ritz 法 3.2.1 問題 ( $\hat{V}$ )

変分問題の有限次元近似版の解を求め、それを元の問題の近似解として採用しよう、というのが **Ritz 法** である。具体的には次の問題を考える。

問題 ( $\hat{V}$ )

$$\text{Find } \hat{u} \in \hat{X}_{g_1} \text{ s.t. } I[\hat{u}] = \min_{\hat{w} \in \hat{X}_{g_1}} I[\hat{w}].$$

前回証明した (W) と (V) の同値性と同様に、( $\hat{W}$ ) と ( $\hat{V}$ ) も同値である。つまり、今考えている Poisson 方程式の境界値問題 (のような対称性のある) 問題では、Galerkin 法と Ritz 法、それぞれによる近似解を定める連立 1 次方程式は同じものである。そこで、**Ritz-Galerkin 法** と呼ばれる。

## 3.2 Ritz 法 3.2.1 問題 ( $\hat{V}'$ )

ちなみに ( $\sum$  や係数を内積の外に出す、という方針で変形して)

$$\begin{aligned} I[\hat{u}] &= \frac{1}{2} \|\hat{g}_1\|^2 + \sum_{i=1}^m a_i \langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_i a_j \langle \psi_i, \psi_j \rangle - (f, \hat{g}_1) \\ &\quad - \sum_{i=1}^m a_i (f, \psi_i) - [g_2, \hat{g}_1] - \sum_{i=1}^m a_i [g_2, \psi_i] \end{aligned}$$

となる。これから極値の条件は<sup>1</sup>

$$0 = \frac{\partial I[\hat{u}]}{\partial a_i} = \langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle + \sum_{j=1}^m a_j \langle \psi_j, \psi_i \rangle - (f, \psi_i) - [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

これは、もちろん Galerkin 法で得た (7) と同じである。

---

<sup>1</sup>  $\frac{\partial}{\partial a_i} a_j = \delta_{ij}$  に注意。一般に  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  
 $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ) とするとき、 $\nabla f(x) = \frac{1}{2}(A + A^T)x + b$  となる。特に  $A$   
が対称ならば  $\nabla f(x) = Ax + b$ 。1 変数の  $(\frac{1}{2}ax^2 + bx + c)'$  =  $ax + b$  の拡張。

## やってみよう $\nabla(\frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c) = \frac{1}{2}(A^T + A)x + b$

微積分の授業などで聞いたことがあるかもしれないが、その覚えがなければ、多変数2次関数の微分をやってみることを勧める。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n a_{kj}x_k x_j + \sum_{k=1}^n b_k x_k + c.\end{aligned}$$

これを  $x_i$  で偏微分すると？(スライド PDF の末尾を見よ。)

## 3.3 誤差最小の原理

### 定理 3.3 (誤差最小の原理)

Ritz-Galerkin 解  $\hat{u}$  は  $\hat{X}_{g_1}$  の中で (ある意味で) 最も  $u$  に近い。すなわち

$$\|\hat{u} - u\| = \min_{\hat{w} \in \hat{X}_{g_1}} \|\hat{w} - u\|.$$

(授業では、証明の前に、 $u$  から超平面  $\hat{X}_{g_1}$  への射影  $\hat{u}$  の図を板書する。)

### 3.3 誤差最小の原理

**証明** まず  $\hat{u}$  は、 $u$  から  $\hat{X}_{g_1}$  に下ろした垂線の足 (正射影) であることを示す。  
弱形式

$$\langle u, v \rangle = (f, v) + [g_2, v] \quad (v \in X),$$

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X})$$

から ( $\hat{X} \subset X$  に注意して)

$$\langle \hat{u} - u, \hat{v} \rangle = 0 \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

任意の  $\hat{w} \in \hat{X}_{g_1}$  に対して、 $\hat{u} - \hat{w} \in \hat{X}$  ゆえ、 $\hat{v}$  のところに  $\hat{u} - \hat{w}$  を代入して

$$(\hat{u} \text{ は垂線の足}) \quad \langle \hat{u} - u, \hat{u} - \hat{w} \rangle = 0.$$

ゆえにピタゴラスの定理の等式

$$\|\hat{w} - u\|^2 = \|\hat{w} - \hat{u} + \hat{u} - u\|^2 = \|\hat{w} - \hat{u}\|^2 + \|\hat{u} - u\|^2$$

が成り立つ。これから

$$\|\hat{u} - u\| \leq \|\hat{w} - u\|$$

を得る。

□

## 3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

実際に問題を解くとき、 $\{\psi_j\}$  を適当に選ばなければならない。古典的な Ritz-Galerkin 法では、基底関数として、微分方程式の主要部の微分作用素の固有関数などを使用する。

### 例 3.4 (常微分方程式の境界値問題に対する Ritz-Galerkin 法)

次の常微分方程式 (1 次元 Poisson 方程式?) の境界値問題を考えよう。

$$(9) \quad \begin{cases} -u'' = f & (0 < x < 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

ここで  $f$  は开区間  $(0, 1)$  上定義された既知関数である。

$\Omega = (0, 1)$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma = \{0, 1\}$ ,  $\Gamma_2 = \emptyset$ ,  $g_1 = 0$  である。

$\hat{g}_1 = 0$  とするのが自然である。 $\hat{X}_{g_1} = \hat{X} := \text{Span}\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$  となる。

$$\psi_j(x) := \sin(j\pi x) \quad (1 \leq j \leq m)$$

とおくと  $\psi_j(0) = \psi_j(1) = 0$  すなわち  $\psi_j = 0$  on  $\Gamma_1$  ( $1 \leq j \leq m$ ) であり、1 次独立である (直交性から容易に証明できる)。

$\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$  は、次のように表せる。

$$(10) \quad \hat{u}(x) = \sum_{j=1}^m a_j \psi_j(x).$$

### 例 3.4 (区間における Ritz-Galerkin 法 (続き))

$\Gamma_2 = \emptyset$  であるから、 $[g_2, \cdot]$  という項は不要で、弱形式は

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

さて

$$\langle \psi_j, \psi_i \rangle = (\psi_j', \psi_i') = ij\pi^2 \int_0^1 \cos(j\pi x) \cos(i\pi x) dx = \frac{1}{2} ij\pi^2 \delta_{ij}$$

であるから

$$A = ((\psi_j, \psi_i)) = \frac{\pi^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 4 & & & \\ & & 9 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & m^2 \end{pmatrix}.$$

これは対角行列であるから、逆行列は一目で

$$A^{-1} = \frac{2}{\pi^2} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1/4 & & & \\ & & 1/9 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1/m^2 \end{pmatrix}.$$



## 例 3.4 (区間における Ritz-Galerkin 法 (続き))

以上を振り返って

- Fourier 級数に慣れていれば、(Ritz-Galerkin 法を知らなくても) (10), (11) を導くのは簡単である (やってみよう)。
- $\psi_j$  は、同次 Dirichlet 条件を課した微分作用素  $-\left(\frac{d}{dx}\right)^2$  の固有関数である。これは“対称な作用素”であるため、直交性

$$i \neq j \Rightarrow (\psi_i, \psi_j) = 0$$

が成り立つ。さらに

$$i \neq j \Rightarrow \langle \psi_i, \psi_j \rangle = 0$$

が成り立ち、係数行列  $A$  が対角行列となって、計算が簡単になっている。

## 3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

以下は 2 次元バージョン。時間があれば (同じことだから)。

### 例 3.5 (正方形領域における Ritz-Galerkin 法)

正方形領域  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  において、Poisson 方程式  $-\Delta u = f$  に同次 Dirichlet 境界条件を課した境界値問題を考える ( $\Gamma_1 = \Gamma$ ,  $g_1 = 0$  である)。このとき  $\{\psi_k\}$  として

$$\varphi_{ij}(x, y) = \sin(i\pi x) \sin(j\pi y) \quad (1 \leq i, j \leq m)$$

を採用するのが便利である (ここで  $m \in \mathbb{N}$ )。弱形式は上の例と同様に

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) \quad (\hat{v} \in \hat{X} := \text{Span}\{\varphi_{ij}\}).$$

である。後のための準備として

$$\langle \varphi_{k\ell}, \varphi_{ij} \rangle = \frac{\pi^2}{4} (ki + \ell j) \delta_{ki} \delta_{\ell j} \quad (1 \leq i, j, k, \ell \leq m)$$

さて

$$\hat{u} = \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m a_{k\ell} \varphi_{k\ell}$$

とおくと、

### 例 3.5 (正方形領域における Ritz-Galerkin 法)

$$\begin{aligned}\langle \hat{u}, \varphi_{ij} \rangle = (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \leq i, j \leq m) &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m a_{k\ell} \langle \varphi_{k\ell}, \varphi_{ij} \rangle = (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \leq i, j \leq m) \\ &\Leftrightarrow a_{ij} \langle \varphi_{ij}, \varphi_{ij} \rangle = (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \leq i, j \leq m) \\ &\Leftrightarrow a_{ij} = \frac{4}{\pi^2(i^2 + j^2)} (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \leq i, j \leq m).\end{aligned}$$

例えば  $f \equiv 1$  (定数関数) である場合、

$$\begin{aligned}(f, \varphi_{ij}) &= \int_0^1 \int_0^1 \sin(i\pi x) \sin(j\pi y) dx dy = \frac{[(-1)^{i+1} + 1] [(-1)^{j+1} + 1]}{ij\pi^2} \\ &= \begin{cases} \frac{4}{ij} & (i, j \text{ が共に奇数}) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}\end{aligned}$$

ゆえに

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{16}{ij(i^2 + j^2)\pi^4} & (i, j = 1, 3, 5, 7, \dots). \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

## 3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

ここで古典的 Ritz-Galerkin 法の特徴を列挙しておこう。

- ① 基底関数として固有関数を使うため、適用範囲が狭い。
- ② Neumann 境界条件の処理が楽。

…以上は有限要素法のテキスト (菊地 [1]) に書いてあったことであるが、次のこともぜひ指摘しておきたい。

- ③ 適用できる問題に対して、少ない手間 (それこそ手計算) で、意外と高精度な解を得ることが出来る。

### 余談 2 (棒の固有値問題)

ずっと以前、私が勤め始めた頃、よその研究室の学生が加藤 [5] の中の例題 (棒の振動の固有値問題) を数値計算することを卒業研究のテーマとして与えられて、それに付き合ったことがある。そのときの記録。

「I 君の固有値問題」 (1992/11)

そんな古くさい問題、差分法を使って、コンピューターで解けば楽勝だと未熟な桂田センセイは思ったが、古典的な Ritz-Galerkin 法は優秀で、ましてそれを Mathematica に載せると…という話。ずっと後になって、その 2 次元版 (板の固有値問題) に関わるとは…

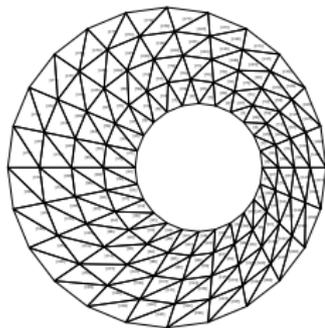
## 3.5 新しい Ritz-Galerkin 法としての有限要素法

ようやく次回から有限要素法の話に突入する。

有限要素法は、次のような特徴を持つ Ritz-Galerkin 法である。

- 領域を
  - 1次元の場合 区間
  - 2次元の場合 三角形, 四角形
  - 3次元の場合 三角錐, 四面体

などの簡単な図形 — 有限要素 (finite element) と呼ぶ — に分割する:



$$\bar{\Omega} \doteq \hat{\Omega} := \bigcup_{k=1}^m e_k \quad (e_k \text{ は有限要素}).$$

## 3.5 新しい Ritz-Galerkin 法としての有限要素法

- 連続な区分的多項式 ( $\hat{\Omega}$  で連続、各有限要素上で多項式に等しいもの) を基底関数に採用する。

ただし、次の図 1 のように、重なりや、すき間、頂点が他の三角形の辺上にあることは避けることにする。各三角形を (有限) 要素とよぶ。

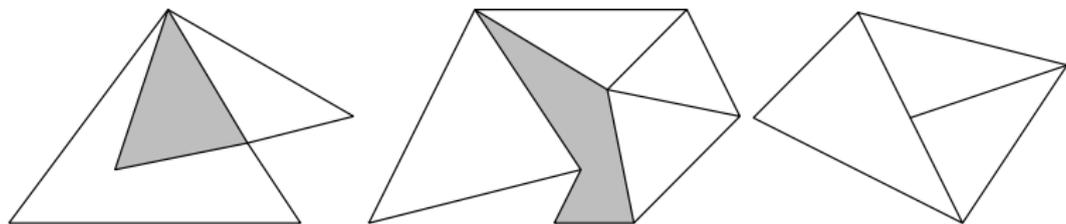


図 1: 重なり, すき間, 頂点が他の要素の辺上にある、なんてのはダメ

(有限要素というときは、試行関数、試験関数として、どういう近似関数を用いるかまで考える場合がある。その辺の区別について言及すべきかも。)

# やってみよう の解答

$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_k x_j) = \frac{\partial}{\partial x_i} x_k \cdot x_j + x_k \frac{\partial}{\partial x_i} x_j = \delta_{ik} x_j + x_k \delta_{ij}$  であるから

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} (Ax, x) + (b, x) + c \right) &= \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_i} (x_k x_j) + \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial}{\partial x_i} x_k + \frac{\partial}{\partial x_i} c \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{kj} (\delta_{ik} x_j + x_k \delta_{ij}) + \sum_{k=1}^n b_k \delta_{ik} + 0 \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n x_j \sum_{k=1}^n a_{kj} \delta_{ik} + \sum_{k=1}^n x_k \sum_{j=1}^n a_{kj} \delta_{ij} \right) + b_i \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^n a_{ki} x_k \right) + b_i \\ &= \frac{1}{2} \left( Ax \text{ の第 } i \text{ 成分} + A^T x \text{ の第 } i \text{ 成分} \right) + b \text{ の第 } i \text{ 成分} \\ &= \frac{1}{2} (A + A^T)x + b \text{ の第 } i \text{ 成分}.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\nabla \left( \frac{1}{2} (Ax, x) + (b, x) + c \right) = \frac{1}{2} (A + A^T)x + b.$$

# 参考文献

- [1] 菊地文雄：有限要素法概説, サイエンス社 (1980), 新訂版 1999.
- [2] John William Strutt (third baron Rayleigh), : *The Theory of Sound, volume 1*, London, Macmillan and co. (1877).
- [3] John William Strutt (third baron Rayleigh), : *The Theory of Sound, volume 2*, London, Macmillan and co. (1878).
- [4] Walter Ritz, von : Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern, *Annalen der Physik Volume 333, Issue 4*, pp. 737–786, (1909), Ritz の方法が述べられている.
- [5] 加藤敏夫：変分法, 寺沢貫一（編）, 自然科学者のための数学概論 — 応用編 —, C 編, 岩波書店 (1960).