

# 応用数値解析特論 第 13 回

～定常 Navier-Stokes 方程式に対する Newton 法～

かつらだ まさし

桂田 祐史

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/ana/>

2020 年 12 月 21 日

# 目次

- 1 本日の講義内容、連絡事項
- 2 Navier-Stokes 方程式に対する有限要素解析
  - 定常 Navier-Stokes 方程式に対する Newton 法
    - 例題プログラムの紹介
    - 領域
    - 領域の三角形分割
    - 方程式
    - 問題点と対処の方針
    - Newton 法の復習
    - 我々の問題での  $f$  と  $f'$  は?
    - Newton 反復の弱形式
    - プログラム中の弱形式解読
    - 初期値の選択
    - 余談: Oseen 方程式
- 3 少し時間が経ってからの訂正と追加
- 4 参考文献

# 本日の講義内容、連絡事項

当初は、第13回で定常 Navier-Stokes 方程式に対する Newton 法と非定常 Navier-Stokes 方程式に対する特性曲線有限要素法の解説をする予定であったが、真面目に説明を用意したところ、思いの外 Newton 法の説明が長くなってしまった。

しかし、この手の話は意外ときちんと説明されないことが多いので(というかきちんとした説明を目にしたことがない)、時間をかけて説明することも意味があるだろうと考え直した次第。

参考に出来る資料を知らないなので、意外とてこずりました。

# 11.4 定常 Navier-Stokes 方程式に対する Newton 法

## 11.4.1 例題プログラムの紹介

前回、定常 Stokes 方程式を有限要素法で解いた。今回は定常 Navier-Stokes 方程式を有限要素法で解いてみよう。

例題プログラムは FreeFem++ 4.7 に付属する

```
/usr/local/ff++/share/FreeFEM/4.7-1/examples/examples/NSNewton.edp  
(2012 January, Hecht)
```

である。

ターミナルでこうすればコピーできる

```
cp -p /usr/local/ff++/share/FreeFEM/4.7-1/examples/examples/NSNewton.edp .
```

これはマニュアル (Hecht [1]) の §2.12 に掲載されているプログラムとほぼ同じである (本来完全に同じにすべきであろう)。

## 11.4.2 領域

$\Omega$  は  $C_e + B_{eb} + B_{eo} + B_{eu} - C_c$  で囲まれる領域とする。ただし、 $R = 5$ ,  $L = 15$ ,

$$C_e : (x, y) = (R \cos t, R \sin t) \quad (t \in [\pi/2, 3\pi/2]),$$

$$C_c : (x, y) = ((\cos t)/2, (\sin t)/2) \quad (t \in [0, 2\pi]),$$

$$B_{eb} : (x, y) = (Lt^{1.2}, -R) \quad (t \in [0, 1]),$$

$$-B_{eu} : (x, y) = (Lt^{1.2}, R) \quad (t \in [0, 1]),$$

$$B_{eo} : (x, y) = (L, t) \quad (t \in [-R, R]).$$

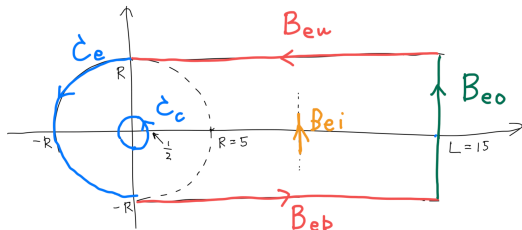


図 1: 領域  $\Omega$  ( $\partial\Omega = C_e + B_{eb} + B_{eo} + B_{eu} - C_c$ )

## 11.4.2 領域

$$\Gamma_1 := -C_c + C_e + B_{eb} + B_{eu}, \quad \Gamma_2 := B_{eo}$$

とおく。 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$  である。

$B_{eb}$  は  $(x, y) = (Lt, R)$  ( $t \in [0, 1]$ ) と書いても同じことであるが、FreeFem++ では  $t$  について等分することを想定してプログラムを書いたため、この式を採用しているのであろう。(こういう工夫が実際に効果があるのかどうかは分からない。)

$B_{eu}$  はプログラムでは

```
border beu(tt=1, 0){real t=tt^1.2; x=t*L; y=R; label=1;}
```

として与えられている。FreeFem++ では、`tt=1,0` と書くことで、パラメーターが 1 から 0 まで減少する曲線を表すことが出来る、ということであろう (こういうことが出来ることは、このプログラムを見て初めて知った)。

## 11.4.3 領域の三角形分割

三角形分割をする際に

$$B_{ei}: (x, y) = (L/2, t) \quad (t \in [-R/4, R/4])$$

という曲線(線分)も用いている。

```
Th=buildmesh(cc(-40)+ce(20)+beb(15)+beu(15)+beo(8)+bei(10));
```

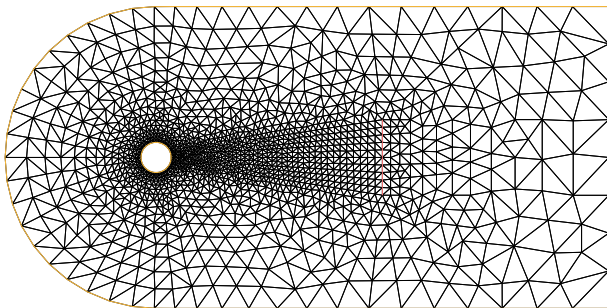


図 2: 領域の三角形分割. 中央部に  $B_{ei}$  (朱色の線分) が見える

## 11.4.4 方程式

このプログラムが解く問題の方程式は (境界条件が、マニュアルにも、プログラムの注釈にも明記されていないが…)、多分、次のものである。

$$(1a) \quad (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega,$$

$$(1b) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$(1c) \quad \mathbf{u} = \mathbf{U} \quad \text{on } \Gamma_1 \setminus C_c,$$

$$(1d) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{on } C_c,$$

$$(1e) \quad -pn + \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{0} \quad \text{on } B_{eo}.$$

(判断の根拠: 1 というラベルをつけた  $\Gamma_1$  で  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$  としていることから、そこで Dirichlet 境界条件をつけているのだろう。初期値  $\mathbf{u}_0$  は

$$\mathbf{u}_0 = \begin{cases} (1, 0)^\top & (x^2 + y^2 > 2) \\ (0, 0)^\top & (x^2 + y^2 \leq 2) \end{cases}$$

であったから、 $\delta \mathbf{u}$  も  $C_c$  では  $\mathbf{0}$ ,  $\Gamma_1 \setminus C_c = C_e + B_{eb} + B_{eu}$  では  $(1, 0)^\top$  である。)

(1e) は自然境界条件である (弱形式には explicit に現れない — Poisson 方程式の問題における同次 Neumann 境界条件のようなもの)。

一様流 ( $\mathbf{u} = \mathbf{U} := (1, 0)^\top$ ) の中に置かれた円柱の周りの流れを求めよという問題である。

前回講義スライド 14 ページ「もう 1 つの弱形式」と類似点が多い。見比べてみよう。



# 部分積分公式

今回弱形式を導くのに必要な部分積分公式は以下のものである。

$$(2) \quad \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x},$$

$$(3) \quad \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

(自力で確認できると思われるが、桂田 [2] の付録 **B** に一応書いてある。)

## 11.4.5 問題点と対処の方針

問題になることと、それへの対処について、次の2点を指摘しておく。

- a) Navier-Stokes 方程式は非線形方程式であるので、一度に解を求めるのが難しい。Newton 法を用いて解くことにする。
- b) 動粘性係数  $\nu = \frac{1}{200}$  は素朴な数値計算にとっては、かなり小さい (“円柱” の直径 1 であるから、これを代表的な長さ、 $\|\mathbf{U}\| = 1$  を代表的な速さに選ぶと、 $\nu$  の逆数が Reynolds 数  $R_e$  に相当するので、 $R_e = 200$  ということになり、これが実はかなり大きい、ということである)。Newton 法の初期値は真の解に十分近いものを選ばないと、反復が収束しないかもしれない。そのため、大きめの  $\nu$  についての解を求め、それを小さい  $\nu$  の問題の Newton 法の初期値とすることで、解きたい  $\nu$  に近づいていく。

## 11.4.6 Newton 法の復習

方程式  $f(u) = 0$  の近似解を求めるための Newton 法とは、まず適当な初期値  $u_0$  を選び、漸化式

$$(4) \quad u_{i+1} = u_i - f'(u_i)^{-1}f(u_i)$$

により  $\{u_i\}$  を定め、十分大きな  $i$  に対して、 $u_i$  を近似解に採用する、というものである。  
(4) は、 $f(u) = 0$  を  $u = u_i$  で線形近似した

$$f'(u_i)(u - u_i) + f(u_i) = 0$$

の解を  $u_{i+1}$  とする、ということである。

$w_i := f'(u_i)^{-1}f(u_i)$  とおくと、 $w_i$  は  $f'(u_i)w_i = f(u_i)$  の解であることに注意すると、次のアルゴリズムを得る (FreeFem++ のマニュアルでは、 $F$  の微分は  $DF$  と表している)。

Find  $u \in V$  such that  $f(u) = 0$  where  $f: V \rightarrow V$ .

1. choose  $u_0 \in V$
2. for (i=0; i<niter; i=i+1)
  1. Solve  $f'(u_i)w_i = f(u_i)$
  2.  $u_{i+1} := u_i - w_i$   
break  $\|w_i\| < \varepsilon$  (修正量が小さくなったら反復を停止する)

## 11.4.7 我々の問題での $f$ と $f'$ は？

$f = 0$  が (1a)–(1e) と一致するようにするには

$$f(\mathbf{u}, p) := \begin{pmatrix} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{u}|_{\Gamma_1} - \mathbf{u}_b \\ -p\mathbf{n} + \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{B_{e_0}} \end{pmatrix}$$

とすれば良いだろう。ここで  $\mathbf{u}_b$  は次式で定まる  $\Gamma_1$  上の関数である。

$$\mathbf{u}_b := \begin{cases} (1, 0)^\top & (\text{on } \Gamma_1 \setminus C_c) \\ (0, 0)^\top & (\text{on } C_c). \end{cases}$$

## 11.4.7 我々の問題での $f$ と $f'$ は？ (続き)

$$\begin{aligned}
 & f(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}, p + \delta p) - f(\mathbf{u}, p) \\
 &= \begin{pmatrix} ((\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) + \nabla(p + \delta p) - ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p) \\ \nabla \cdot (\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{u} \\ (\mathbf{u} + \delta\mathbf{u})|_{\Gamma_1} - \mathbf{u}_b - (\mathbf{u}|_{\Gamma_1} - \mathbf{u}_b) \\ -(p + \delta p)\mathbf{n} + \nu \frac{\partial(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{B_{eo}} - \left( -p\mathbf{n} + \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{B_{eo}} \right) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (\delta\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta\mathbf{u} - \nu \Delta(\delta\mathbf{u}) + \nabla(\delta p) + \delta\mathbf{u} \cdot \nabla(\delta\mathbf{u}) \\ \nabla \cdot (\delta\mathbf{u}) \\ \delta\mathbf{u}|_{\Gamma_1} \\ -(\delta p)\mathbf{n} + \nu \frac{\partial(\delta\mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{B_{eo}} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

であるから

$$f'(\mathbf{u}, p) \begin{pmatrix} \delta\mathbf{u} \\ \delta p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\delta\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta\mathbf{u} - \nu \Delta(\delta\mathbf{u}) + \nabla(\delta p) \\ \nabla \cdot (\delta\mathbf{u}) \\ \delta\mathbf{u}|_{\Gamma_1} \\ -(\delta p)\mathbf{n} + \nu \frac{\partial(\delta\mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{B_{eo}} \end{pmatrix}.$$

(書くと手間だが、要するに2次式であるから、慣れると結果がすぐに分かる。)

## 11.4.8 Newton 反復の弱形式

$f'(\mathbf{u}_i, p_i) \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta p \end{pmatrix} = f(\mathbf{u}_i, p_i)$  を具体的に書くと

$$(5a) \quad (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_i + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} - \nu \Delta(\delta \mathbf{u}) + \nabla(\delta p) = (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i - \nu \Delta \mathbf{u}_i + \nabla p_i \quad \text{in } \Omega$$

$$(5b) \quad \nabla \cdot \delta \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}_i \quad \text{in } \Omega$$

$$(5c) \quad \delta \mathbf{u} = 0 \quad \text{on } \Gamma_1,$$

$$(5d) \quad -(\delta p) \mathbf{n} + \nu \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{0} \quad \text{on } B_{eo}.$$

当たり前のことであるが、 $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta p$  についての線形方程式である。

最初の 2 つに試験関数 (それぞれ  $\mathbf{v}$  と  $q$ ) をかけて積分すると

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [((\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{v} + ((\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \nu \Delta(\delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + \nabla(\delta p) \cdot \mathbf{v}] dx \\ & = \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i - \nu \Delta \mathbf{u}_i + \nabla p_i) \cdot \mathbf{v} dx \\ & \int_{\Omega} q(\nabla \cdot (\delta \mathbf{u})) dx = 0. \end{aligned}$$

## 11.4.8 Newton 反復の弱形式 (続き)

それぞれ部分積分して (境界積分を消去するのに、(5d) を用いる)

$$(6a) \quad \int_{\Omega} [((\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{v} + ((\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \nu \nabla(\delta \mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} - \delta p(\nabla \cdot \mathbf{v})] d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i - \nu \Delta \mathbf{u}_i + \nabla p_i) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$$

$$(6b) \quad \int_{\Omega} q(\nabla \cdot (\delta \mathbf{u})) d\mathbf{x} = 0.$$

これが弱形式である。

## 11.4.9 プログラム中の弱形式解読

次のようなマクロが定義されている。

```
Grad(u1,u2) [dx(u1),dy(u1),dx(u2),dy(u2)]
```

これは  $\nabla \mathbf{u}$  を 4次元ベクトルにしたものである。これから

```
Grad(du1,du2)'*Grad(v1,v2)
```

は

```
dx(du1)*dx(v1)+dy(du1)*dy(v1)+dx(du2)*dx(v2)+dy(du2)*dy(v2)
```

となる。これは  $\nabla(\delta \mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v}$  である。

注 FreeFem++ では、' は転置を表す (MATLAB でも使われる、古い記法の利用)。

ベクトルの内積

```
real[int] a=[1,2,3,4];  
real[int] b=[-4,-3,-2,-1];  
cout << a'*b << endl;
```

これで -20 という値が表示される。



## 11.4.9 プログラム中の弱形式解読 (続き)

一方

$$\text{UgradV}(u1,u2,v1,v2) \quad [[u1,u2]' * [dx(v1),dy(v1)], [u1,u2]' * [dx(v2),dy(v2)]]$$

は

$$\begin{pmatrix} u1 * dx(v1) + u2 * dy(v1) \\ u1 * dx(v2) + u2 * dy(v2) \end{pmatrix},$$

すなわち

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \left( u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ u_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

を意味する。ゆえに

$$\text{UgradV}(du1, du2, u1, u2)' * [v1, v2]$$

は  $((\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$  を、

$$\text{UgradV}(u1, u2, du1, du2)' * [v1, v2]$$

は  $((\mathbf{u} \cdot \nabla) (\delta \mathbf{u})) \cdot \mathbf{v}$  を計算する。

## 11.4.9 プログラム中の弱形式解読 (続き)

```
int2d(Th)(
    nu*(Grad(du1,du2)')*Grad(v1,v2))
+ UgradV(du1,du2, u1, u2)'*[v1,v2]
+ UgradV( u1, u2,du1,du2)'*[v1,v2]
- div(du1,du2)*q - div(v1,v2)*dp
- 1e-8*dp*q // stabilization term
)
```

は次式を意味する。

$$\int_{\Omega} [\nu \nabla(\delta \mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} + ((\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + ((\mathbf{u} \cdot \nabla)(\delta \mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} - q \nabla \cdot (\delta \mathbf{u}) - \delta p \nabla \cdot \mathbf{v} - 10^{-8}(\delta p)q] dx$$

```
- int2d(Th)(
    nu*(Grad(u1,u2)')*Grad(v1,v2))
+ UgradV(u1,u2, u1, u2)'*[v1,v2]
- div(u1,u2)*q - div(v1,v2)*p
- 1e-8*p*q
)
```

は次式を意味する。

$$- \int_{\Omega} [\nu \nabla \mathbf{u}_i : \nabla \mathbf{v} + ((\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{v} - q \nabla \cdot \mathbf{u}_i - p_i \nabla \cdot \mathbf{v} - 10^{-8} p_i q] dx$$

## 11.4.10 初期値の選択

最初に  $\nu = \frac{1}{50}$  について、

$$\mathbf{u}_0(x, y) = \begin{cases} (1, 0)^\top & (x^2 + y^2 > 2) \\ (0, 0)^\top & (x^2 + y^2 \leq 2) \end{cases}$$

を Newton 法の初期値として Navier-Stokes 方程式の解を求め、それを  $\nu$  を小さくした Navier-Stokes 方程式に対する Newton 法の初期値としている。

最終的には、 $\nu = \frac{1}{200}$  の場合の Navier-Stokes 方程式の解を求めている。

Newton 法の収束が早ければ、 $\nu$  をより速く小さくしたり、Newton 法が収束しなければ、 $\nu$  を少し (戻して) 大きくしたり、細かい制御を行っている。余裕があればプログラムを読んでみよう。

それが筋が通ったものであるか分からないが「そこまでやるか」と感心した。こういうプログラムを公開してもらえるのは、大変ありがたいことである。

## 11.4.11 余談: Oseen 方程式

NSNewton.edp の弱形式を定義しているところで `solve Oseen()` と書いてある。

オゼーン  
Oseen 方程式は、Navier-Stokes 方程式を一様な定常流の周りで線形近似したものである。無限遠で小さいが 0 ではない、一様な速度  $U\mathbf{e}_x = (U, 0, 0)^T$  を持つ流れを扱いたい。

$$\mathbf{v} := \mathbf{u} - U\mathbf{e}_x$$

とおく ( $\mathbf{v}$  は  $\delta\mathbf{u}$  と書くのが良いかもしれない)。このとき

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \left( (U + v_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \begin{pmatrix} U + v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = U \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \doteq U \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1}.$$

そこで近似方程式として

$$(7) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}$$

の採用が考えられる。この方程式が普通 Oseen 方程式と呼ばれる (と私は習った)。

Wikipedia 等を見ると、もう少し意味を広げて解釈されることもあるようである。

しかし、Hecht のプログラムで、Oseen と言っているのは、かなりの拡張解釈であると思われる (うるさい人がツッコミを入れそうだ)。

“Oseen 近似” という検索語でヒットした玉田 [3] は、Oseen 方程式が研究された経緯が分かる解説である (と私は感じた)。

## 少し時間が経ってからの訂正と追加

(工事中)

説明がイマイチのところがあり、一部は式レベルでミスをしている気がする。時間が取れしだい直す。今は要点のみ以下に示す。

例えば、 $A$  が線形作用素、 $a$  が双線形作用素とするとき、

$$f(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} A\mathbf{u} - \mathbf{b} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

の微分は

$$f'(\mathbf{u})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} A\mathbf{v} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \end{pmatrix}.$$

これを言っておくと、計算の見通しが良いというか、定理に格上げしておいてそれを使って議論すると、説明がかなり短縮されそうである。

もうやってしまった授業のスライドなので、ミスを直すにとどめて、短縮版の説明をするのは次の機会に、とするのかな。

- [1] Hecht, F.: Freefem++,  
<https://doc.freefem.org/pdf/FreeFEM-documentation.pdf>, 以前は <http://www3.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf> にあった。
- [2] 桂田祐史：流体力学の方程式に対する有限要素法, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/library/fem/fem-for-fluid.pdf> (2009～).
- [3] 玉田琮：近似解法：Oseen 近似, 境界層近似等について, 京都大学数理解析研究所講究録, Vol. 52, pp. 37–52 (1968), <https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/handle/2433/107760>.