

応用数値解析特論 第 12 回

～Navier-Stokes 方程式に対する有限要素法 (1)～

かつらだ まさし
桂田 祐史

[http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/
ouyousuuchikaisekitokuron-2020/](http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/ouyousuuchikaisekitokuron-2020/)

2020 年 12 月 14 日

① 本日の講義内容、連絡事項

② Navier-Stokes 方程式に対する有限要素法

- はじめに
- 弱形式
 - ターゲット問題とその弱定式化
 - 弱形式 (2a) の導出
 - 弱形式を 1 つの方程式の形で書く
- 定常 Stokes 方程式の Dirichlet 境界値問題
 - ターゲット問題と弱定式化
 - もう一つの弱形式
 - ペナルティ法
 - cavity 問題を解いてみる
 - お話 (鞍点型変分問題と inf-sup 条件)

本日の講義内容、連絡事項

- ① Navier-Stokes 方程式の有限要素法シミュレーションのため、弱形式の導出について説明する。前回解説した **3種類**の境界条件を扱えることを示すところがハイライト。
- ② 定常 Stokes 方程式の Dirichlet 境界値問題を有限要素法で解く方法を解説する。
 - ① で導出したのとは違う弱形式も紹介する。
 - ② 普通に定式化すると圧力に一意性がないため、 $Q = \{q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0\}$ という関数空間を導入するのが定番のやり方であるが、そのままでは計算しにくい。そのため、**ペナルティ法**を用いるプログラムがしばしば利用される。それを紹介する。
 - ③ この (定常 Stokes 方程式の Dirichlet 境界値) 問題が**鞍点型変分問題**であることを説明する。有限要素近似で解く場合に、**一様 inf-sup 条件**というものが重要となり、それは素朴に有限要素空間を選択すると満たされないことがある (例えば P1/P1)、ということを紹介する。

かなり雑だけれど、見せた方が親切という気がするので、

「流体力学の方程式に対する有限要素法」 [1]

(<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/ana/nonopen/fem-for-fluid.pdf>)

を用意した (パスワード付)。特に積分公式について、微積分で習う Gauss の発散定理だけでは分かりにくいかもしれない (それと同値だが見かけの違う公式を使う)。[1] の付録 B を参照せよ。

Navier-Stokes 方程式の適切性は未解決の問題である、と言うのは常識である。前回その説明をサボったのはまずかった。付録「A. 適切性に関する常識」をつけておく。

本日の講義内容、連絡事項

レポート課題 B について、Oh-o! Meiji に出しました。

有限要素法や変分法に関係する自由課題。数学的な分析と数値実験の少なくともどちらかがあること。例えば、自分が興味ある現象の数値モデルについて説明し、それを有限要素法によってシミュレーションして得た結果を分析する、という内容で構わない。

- 有限要素法を使う場合、弱形式の導出などもきちんと行うこと。
- 数値計算する場合、なるべく計算結果が正しいことを何らかの方法で確認すること。
- コンピューターで計算する場合、原則としてプログラムと、こちらが再現できるための情報を添えること。

第1次締め切りは 2021 年 1 月 15 日 (金曜)18:00。A4 サイズの PDF にまとめて下さい。

追加で何かしてもらおう可能性があります (レポートの内容についてのこちらからの質問に答えるなど)。必要がある場合は、1 月 18 日 2 限の講義までに伝えます (Oh-o! Meiji のフィードバックのコメントを使う予定、どうするかは 1 月 18 日の講義で説明)。その追加レポートの締め切りは 1 月末日とする予定です。

11 Navier-Stokes 方程式に対する有限要素法

11.1 はじめに

目標: Navier-Stokes 方程式の有限要素法シミュレーションの大まかな説明

有限要素法をするため、ある弱定式化を紹介する。応力境界条件や滑り境界条件などへの応用を考えて、粘性項に $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$ ($= \text{grad div } \mathbf{u}$) を残した方程式から導出する弱形式を紹介するが、これが唯一の弱定式化というわけではない。例えば Dirichlet 境界値問題の場合は、別の弱定式化を後で紹介する。

元の微分方程式が非線形ならば、当然弱形式も非線形になる。定常問題ならば、非線形方程式を解くために Newton 法などを利用する必要がある。それはそれで…

非定常問題の場合は、線形方程式を解くのを避けることも出来るが、高い Reynolds 数の場合に安定性の問題が生じる。それへの対処法は現在でも研究課題のようだ。

一番基本的な定常 Stokes 方程式ならば簡単かと言うと、Poisson 方程式の場合の最小型変分原理とは異なる鞍点型変分原理の支配する問題で、その説明も一仕事だ。そもそも有限要素法で、区分的 1 次多項式ではうまく解けず、P2/P1 や P1b/P1 としなくてはならない、などは今では常識化されているが、納得するのは一苦勞である。

乱流が支配的な現象のシミュレーションについては、別のアプローチが必要になる。どこらへんで切り替える (give up する) ものだろうか。

11.1 はじめに このスライドは飛ばします

(独白) 説明すべきことがたくさんある。毎年、説明の能率をあげて行って (自習できるようなことは別資料を読めということにしたり)、常識的なことを伝えようと考えているけれど、なかなか思うように出来ていない。

私自身が流体の数値計算の専門家でない、というのも大きいかもしれない。専門家の仕事を期待する次第 (ずっと前に常識化していることが、テキスト・レベルに降りてきていないような気がする。日本の大学は忙しくなりすぎたのかなあ…)。

昔、某先生が Navier-Stokes 方程式に対する有限要素法を理論的なところまできちんと理解したならば、それだけで修士の学位をやっても良いと思う (オリジナリティのある研究成果がなくても)、と言っていた。Navier-Stokes 方程式の数値計算の勉強がヘビーなのは間違いない。

一方で、今では FreeFem++ に代表されるソフトウェアがあるため、詳しいことは知らなくてもシミュレーションは出来るようになっている。

車の仕組みは知らなくても運転は出来る、何か不都合が起こったら業者に頼めば良い。数値シミュレーションもそういうふうになったりする (なりつつある) のだろうか。

私自身は物づくりにあこがれる人間なので、運転技術の動向には注意しつつ、仕組みの説明を続けるのだろう。

11.2 弱形式 11.2.1 ターゲット問題とその弱定式化

\mathbb{R}^d ($d = 2, 3$) の有界領域 Ω の境界は、 $\partial\Omega$ は $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ の3部分からなるとする。

$$(1a) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu (\Delta \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})) - \mathbf{f} = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty),$$

$$(1b) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty),$$

$$(1c) \quad \mathbf{u} = \mathbf{g}_1 \quad \text{on } \Gamma_1 \times (0, \infty),$$

$$(1d) \quad \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} = \mathbf{g}_2 \quad \text{on } \Gamma_2 \times (0, \infty),$$

$$(1e) \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \parallel \mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma_3 \times (0, \infty).$$

ただし

$$\sigma(\mathbf{u}, p) = -pl + 2\nu E(\mathbf{u}),$$

$$E(\mathbf{u}) = (e_{ij}(\mathbf{u})), \quad e_{ij}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

非圧縮条件 (1b) を課しているのに、 $+\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$ を含めているのは、後で分かるが境界条件をうまく扱うためである。

$$X(\phi) := \left\{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^d \mid \mathbf{u} = \phi \text{ on } \Gamma_1, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \Gamma_3 \right\}, \quad V := X(\mathbf{g}_1), \quad X := X(0),$$

$$Q := \begin{cases} \{q \in L^2(\Omega) \mid (q, 1) = 0\} & (\Gamma_1 = \partial\Omega, \text{ i.e. } \Gamma_2 = \Gamma_3 = \emptyset) \\ L^2(\Omega) & (\Gamma_1 \neq \partial\Omega). \end{cases}$$

11.2.1 ターゲット問題とその弱定式化

まず結果から先に述べると、(1a)–(1e) の弱定式化は次のようになる。

Find $(\mathbf{u}, p) \in V \times Q$ s.t.

$$(2a) \quad \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt}, \mathbf{v} \right) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + [\mathbf{g}_2, \mathbf{v}] \quad (\mathbf{v} \in X),$$

$$(2b) \quad b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad (q \in Q).$$

ただし

$$(3) \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := 2\nu \int_{\Omega} E(\mathbf{u}) : E(\mathbf{v}) \, dx,$$

$$(4) \quad b(\mathbf{v}, p) := - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx,$$

$$(5) \quad [\mathbf{g}_2, \mathbf{v}] := \int_{\Gamma_2} \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{v} \, d\sigma.$$

($d\sigma$ は面積要素 (2次元ならば線要素)、応力テンソル σ とは関係ない。)

(2b) の導出は簡単である。以下 (2a) の導出を説明する。

11.2.2 弱形式 (2a) の導出

任意の $\mathbf{v} \in X$ を取り、(1a) と内積をとり、 Ω で積分する。

$$(6) \quad \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + (\nabla p, \mathbf{v}) - \nu (\Delta \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}), \mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) = 0.$$

左辺第 1 項については当面放置する。左辺第 2 項については、これまで (?) と同様に

$$(\nabla p, \mathbf{v}) = \int_{\partial\Omega} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}).$$

一方、左辺第 3 項については、次の形の部分積分公式が利用出来る。

補題 1.1 (部分積分公式 (誰か名前つけないかな))

$$(7) \quad (\Delta \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}), \mathbf{v}) = 2 \int_{\partial\Omega} E(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma - 2 \int_{\Omega} E(\mathbf{u}) : E(\mathbf{v}) \, dx.$$

ただし $P = (p_{ij})$, $Q = (q_{ij})$ に対して $P : Q := \sum_{i,j=1}^d p_{ij} q_{ij}$ とする。

この証明は後回しにして、とりあえずこれを使って (6) を書き換えると

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) + \int_{\partial\Omega} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma - 2\nu \int_{\partial\Omega} E(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma + 2\nu \int_{\Omega} E(\mathbf{u}) : E(\mathbf{v}) \, dx - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) = 0.$$

11.2.2 弱形式 (2a) の導出

$p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - 2\nu E(\mathbf{u})\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = -(-pl + 2\nu E(\mathbf{u}))\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = -\sigma(\mathbf{u}, p)\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$ であるから (←注目)

$$(8) \quad \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) - \int_{\partial\Omega} \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma + 2\nu \int_{\Omega} E(\mathbf{u}) : E(\mathbf{v}) \, dx - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) = 0.$$

Γ_1 では、 $\mathbf{v} \in X$ であることから $\mathbf{v} = 0$. ゆえに

$$\int_{\Gamma_1} \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma = 0.$$

Γ_2 では、 $\sigma(\mathbf{u}, p)\mathbf{n} = \mathbf{g}_2$ であるから

$$\int_{\Gamma_2} \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma = \int_{\Gamma_2} \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{v} \, d\sigma.$$

Γ_3 では、 $\sigma(\mathbf{u}, p)\mathbf{n}$ は \mathbf{n} と平行で、 \mathbf{v} は $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ を満たすので

$$\int_{\Gamma_3} \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma = 0.$$

ゆえに (8) は次式と同値である。

$$(9) \quad \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) + 2\nu \int_{\Omega} E(\mathbf{u}) : E(\mathbf{v}) \, dx - \int_{\Gamma_2} \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{v} \, d\sigma - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) = 0.$$

これを移項すると (2a) になる。

□

11.2.2 弱形式 (2a) の導出 後始末 (補題 1.1 の証明)

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{u}) : \mathbf{E}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \sum_{i,j} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) d\mathbf{x} \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{i,j} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) d\mathbf{x} \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{i,j} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) d\mathbf{x} \quad (\because \sum_{i,j} A_{ij} = \sum_{i,j} A_{ji}) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) d\mathbf{x} \quad (\text{ここから部分積分で } \mathbf{v} \text{ の微分を } \mathbf{u} \text{ によせる}) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i n_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_j n_i \right) d\sigma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} v_i + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} v_j \right) d\mathbf{x} \right) \\
 &= \sum_{i,j} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) v_i n_j d\sigma - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} v_i + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} v_j \right) d\mathbf{x} \quad (\because \sum_{i,j} A_{ij} = \sum_{i,j} A_{ji}) \\
 &= \int_{\partial\Omega} \sum_i \left(\sum_j e_{ij} n_j \right) v_i d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) v_i + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) v_j d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}. \quad (\text{証明終})
 \end{aligned}$$

11.2.3 弱形式を1つの方程式の形で書く

$$A(\mathbf{u}, p, \mathbf{v}, q) := a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) + b(\mathbf{u}, q)$$

とおく。次の2つの問題は同値である。

問題 1

Find $(\mathbf{u}, p) \in V \times Q$ s.t.

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= (f, \mathbf{v}) \quad (\mathbf{v} \in X), \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad (q \in Q). \end{aligned}$$

問題 2

Find $(\mathbf{u}, p) \in V \times Q$ s.t.

$$(10) \quad A(\mathbf{u}, p, \mathbf{v}, q) = (f, \mathbf{v}) \quad ((\mathbf{v}, q) \in X \times Q).$$

(\mathbf{u}, p) が問題 1 の解であれば、問題 2 の解であることはすぐ分かる。

一方 (\mathbf{u}, p) が問題 2 の解であれば、 $q = 0$ であるような (\mathbf{v}, q) について考えると $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (f, \mathbf{v})$ が導かれ、 $\mathbf{v} = 0$ であるような (\mathbf{v}, q) について考えると $b(\mathbf{u}, q) = 0$ が導かれるので、 (\mathbf{u}, p) は問題 1 の解である。

実は、FreeFem++ では問題 2 の (10) の形で弱形式の指定をする。慣れる必要がある。

11.3 定常 Stokes 方程式の Dirichlet 境界値問題

11.3.1 ターゲット問題と弱定式化

$$(11a) \quad -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad (\text{in } \Omega)$$

$$(11b) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

$$(11c) \quad \mathbf{u} = \mathbf{g}_1 \quad (\text{in } \Gamma).$$

境界条件もシンプル ($\Gamma_2 = \Gamma_3 = \emptyset$) になっていることに注意。

上で説明した弱定式化をこちらに適用すると、次のようになる。

Find $(\mathbf{u}, p) \in V \times Q$ s.t.

$$(12a) \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad (\mathbf{v} \in X),$$

$$(12b) \quad b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad (q \in Q).$$

ただし

$$(13) \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := 2\nu \int_{\Omega} E(\mathbf{u}) : E(\mathbf{v}) \, dx, \quad b(\mathbf{v}, p) := - \int_{\Omega} p \nabla \mathbf{v} \, dx.$$

関数空間も次のようになる。

$$X(\phi) = \left\{ \mathbf{w} \in H^1(\Omega)^d \mid \mathbf{w} = \phi \text{ on } \Gamma \right\}, \quad V := X(\mathbf{g}_1), \quad X := X(0),$$

$$Q := \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid (q, 1) = 0 \right\}.$$

11.3.2 もう一つの弱形式

§11.2 で弱形式を導くときに

$$(再掲 1a) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu (\Delta \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})) - \mathbf{f} = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty)$$

に試験関数をかけるところから始めたが、

$$(14) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} - \mathbf{f} = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty)$$

から始めることも出来る。しかしその場合は、(自然に) 扱える境界条件が違ってくる。

$$(15a) \quad -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad (\text{in } \Omega),$$

$$(15b) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{in } \Omega),$$

$$(15c) \quad \mathbf{u} = \mathbf{g}_1 \quad (\text{in } \Gamma_1),$$

$$(15d) \quad -pn + \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = \mathbf{g}_2 \quad (\text{in } \Gamma_2). \quad (\leftarrow \text{新顔})$$

この場合は、 a の代わりに a_1 と言う形式を使えば良い (途中説明略)。すなわち

$$(16a) \quad a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad (\mathbf{v} \in X),$$

$$(16b) \quad b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad (q \in Q).$$

ここで

$$(17) \quad a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx = \nu \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, dx.$$

11.3.3 ペナルティ法

理論的には、上の(2つ紹介した)定式化で一応筋は通るのだが、 Q のように平均 $(q, 1) = \int_{\Omega} q \, dx$ が0と言う条件を課した有限要素空間(近似関数の空間)を使うのは難しい。

そのため、実際の数値計算では、**ペナルティ法**と言う方法がしばしば使われる(FreeFem++のマニュアル Hecht [2]の§5.6に少し説明がある)。これは、小さい正定数 ε (以下の例では 10^{-6} とか 10^{-10}) に対して、 \mathbf{u} , p の代わりに、次の問題の解 \mathbf{u}_{ε} , p_{ε} を使う、というものである。

Find $(\mathbf{u}_{\varepsilon}, p_{\varepsilon}) \in V \times L^2(\Omega)$ s.t.

$$(18a) \quad a(\mathbf{u}_{\varepsilon}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p_{\varepsilon}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad (\mathbf{v} \in X),$$

$$(18b) \quad b(\mathbf{u}_{\varepsilon}, q) = \varepsilon p_{\varepsilon} \quad (q \in L^2(\Omega)).$$

この問題は一意的な解を持ち、また次のような誤差評価が成り立つことが知られている(C は ε によらない正の定数)。

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\varepsilon}\|_{1,\Omega} + \|p - p_{\varepsilon}\|_{0,\Omega} \leq C\varepsilon.$$

実際には、さらに有限要素近似をすることになるが、近似解 $\hat{\mathbf{u}}$, \hat{p} の精度よりも ε を十分小さく取れば、 $\hat{\mathbf{u}}_{\varepsilon}$, \hat{p}_{ε} は近似解として遜色ないものになることが期待出来る。

11.3.4 cavity 問題を解いてみる

流体の問題で、解法の“試し斬り”に使われることで有名な **cavity flow** の問題 (the driven cavity flow problem) を紹介する。

$$\Omega := (0, 1) \times (0, 1) \quad (\text{正方形領域}), \quad \Gamma := \partial\Omega,$$
$$\mathbf{g}_1(x, y) := \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & (x = 0 \text{ または } x = 1 \text{ または } y = 0) \\ \begin{pmatrix} g_1(x) \\ 0 \end{pmatrix} & (y = 1), \end{cases}$$
$$g_1(x) := 4x(1 - x).$$

(正方形領域の境界のうち、上の辺を除いて流速は 0, 上の辺では水平方向右向きに速さ $4x(1 - x)$ で流れている。)

11.3.4 cavity問題を解いてみる

Stokes-cavity.edp (前半)

```
// example 1
// Stokes equations : regularized cavity flow problem
// COE-tutorial 2007, Atsushi Suzuki 2007/03/08
//
mesh Th=square(20,20);
fespace Vh(Th,P1b),Qh(Th,P1);

Vh u1,u2,v1,v2;
Qh p,q;
macro d11(u1)      dx(u1) //
macro d22(u2)      dy(u2) //
macro d12(u1,u2)  (dy(u1) + dx(u2))/2.0 //

real epsln = 1.0e-6;

solve stokes([u1,u2,p], [v1,v2,q]) =
int2d(Th) ( 2.0*(d11(u1)*d11(v1)+2.0*d12(u1,u2)*d12(v1,v2)+d22(u2)*d22(v2))
- dx(v1)*p - dy(v2)*p - dx(u1)*q - dy(u2)*q
- p*q*epsln
)
+ on(1,2,4,u1=0,u2=0) + on(3,u1=x*(1-x)*4,u2=0) ;
```

11.3.4 cavity 問題を解いてみる

Stokes-cavity.edp (後半)

```
real area = int2d(Th)(1.0);
real meanp = int2d(Th)(p) / area;
cout << "mean pressure = " << meanp << endl;
p = p - meanp;
plot([u1,u2],p,wait=1,value=true,coef=0.1);
```

入手して実行

```
curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/misc/20201214/Stokes-cavity.edp;
FreeFem++ Stokes-cavity.edp
```

解は `plot([u1,u2],p,...)` として表示している。

圧力 p はスカラー場であるので、`plot()` に渡すと、等高線が表示できる (Poisson 方程式のときの解の表示と同様)。

流速 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^\top$ は 2 次元ベクトル場であり、`u1, u2` として求めている。これを `[u1,u2]` として `plot()` に渡すと、有向線分 (矢印) で表示される。矢印の大きさは `A` (大きくする), `a` (小さくする) で調節可能である (`arrow` の 'a' だろう)。

11.3.4 cavity 問題を解いてみる

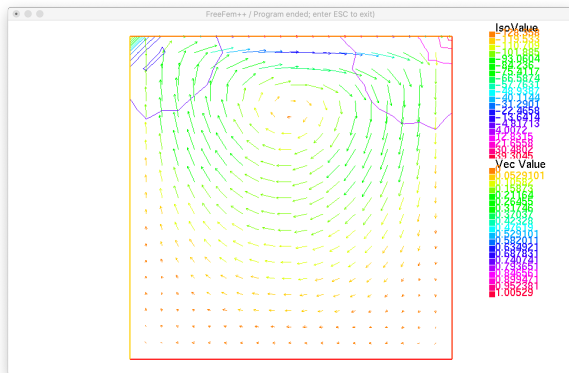


図 1: Stokes-cavity.edp の実行結果

'A' を打って少し矢印を大きくしてから画像を保存

11.3.5 お話 (1) 鞍点型変分問題

Poisson 方程式の際に、弱形式 (W) がある変分問題 (V) と同値であることを述べた。Stokes 方程式の問題も、ある種の変分問題と同値であることが知られている。それについて説明しよう。

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, q) := \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, q) - (\mathbf{f}, \mathbf{v})$$

とおく。

問題 (S)

Find $(\mathbf{u}, p) \in V \times Q$ s.t.

$$(19) \quad \mathcal{L}(\mathbf{u}, q) \leq \mathcal{L}(\mathbf{u}, p) \leq \mathcal{L}(\mathbf{v}, p) \quad ((\mathbf{v}, q) \in V \times Q).$$

(19) は、 (\mathbf{u}, p) が \mathcal{L} の鞍点であることを意味するので、**鞍点型変分問題** (saddle point problem) と呼ばれる。

Cf. $f(v, q) = v^2 - q^2$ とする。 $(u, p) = (0, 0)$ は極値点で次式を満たす (鞍点である):

$$f(u, q) \leq f(u, p) \leq f(v, p) \quad ((v, q) \in \mathbb{R}^2).$$

(\mathbf{u}, p) が弱形式の解であることと、問題 (S) の解であることが同値であることを示すのは、手頃な演習問題である (解くとすっきりすると思われるので、お勧め)。

11.3.5 お話 (2) inf-sup 条件

最小型変分問題 (V) や、鞍点型変分問題 (S) について、解が一意的に存在することを保証する定理を紹介しようと考えているが (時間が足りるか少し心配)、鞍点型変分問題については、 a が強圧的であること ($\inf_{\mathbf{v} \in V} \frac{a(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_V^2} > 0$), b が **inf-sup 条件**

$$(20) \quad \inf_{\mathbf{q} \in Q} \sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{b(\mathbf{v}, \mathbf{q})}{\|\mathbf{q}\|_Q \|\mathbf{v}\|_V} > 0$$

を満たすことが鍵となる。さらに有限要素近似を行う場合には、次の条件が必要となる。

- ある $\alpha > 0$ が存在して、十分小さい任意の h に対して

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{V_h}^2} \geq \alpha \quad (\text{一様強圧性}).$$

- ある $\beta > 0$ が存在して、十分小さい任意の h に対して

$$\inf_{\mathbf{q}_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, \mathbf{q}_h)}{\|\mathbf{q}_h\|_{Q_h} \|\mathbf{v}_h\|_{V_h}} \geq \beta \quad (\text{一様 inf-sup 条件}).$$

このうち一様 inf-sup 条件は、 V_h と Q_h の両方が関係することに注意。実は有限要素空間の選び方によっては、この条件が満たされないことがある。

11.3.5 お話 (2) inf-sup 条件 (続き)

例えば P1/P1 (流速も圧力も区分的 1 次多項式で近似) は、この一様 inf-sup 件を満たさず、実際にしばしば計算が破綻する。

P2/P1 (流速は区分的 2 次多項式, 圧力は区分的 1 次多項式) や P1b/P1 (流速は区分的 2 次多項式, 圧力は区分的 1 次多項式+気泡関数) は満たしている。

プログラム中で

```
fespace Vh(Th,P1b),Qh(Th,P1);
```

としているのに注目。Qh については、Poisson 方程式のときと同様に P1 (区分的 1 次多項式) 要素を用いているが、Vh については、**P1 bubble** (気泡関数要素, P1b あるいは P1+ と表す) を用いている。流速に P1 bubble, 圧力に P1 を用いる組み合わせを **MINI 要素** とも呼ぶ(らしい)。

A. 適切性に関する常識 (前回の付録にすべきであった)

解の存在、一意性、解の(初期値・境界値などの)データに関する連続性が成り立つとき、その問題は**適切 (well-posed)**である、と言う。

Navier-Stokes 方程式の適切性は、未解決な部分が残る重要な研究対象であり、やさしい教科書は見当たらない。道案内としては、岡本 [3] を推奨する。少し古いが、ラジゼンスカヤ [4] も定番本(今絶版?機会があれば入手しておくとも良いかも)。

以下は受け売りである。

圧力については定数差は無視できる場合が多い(方程式で考える範囲内では、 p が解ならば、 $p + C$ (C は定数) も解である、ということ。非圧縮という仮定をおいてあるせいか。)

Stokes 方程式は、**線形方程式であるから**、適切性等についても満足の行く結果が得られている。例えば、[4] の第 2 章「線形化された定常問題」、第 3 章「流体力学的ポテンシャル論」、第 4 章「線形非定常問題」に、Stokes 方程式についての数学的考察が載っている。

Euler 方程式は、非線形方程式であり、かなり手ごわい。ある程度まとまった日本語の解説としては、岡本 [5] がある。無限に多くの定常解が存在するなど、Stokes 方程式とは全く異なる様相を示す。

Euler 方程式は、Navier Stokes 方程式で形式的に $\nu \rightarrow 0$ ($\Leftrightarrow R \rightarrow \infty$) の極限を取ったものであるが、その解は、 ν が小さい場合の Navier-Stokes 方程式の解とはかなり異なる(そうである)。

A. 適切性に関する常識

Naiver-Stokes 方程式の定常問題については、同次 Dirichlet 境界条件のもとでは、以下が成り立つ。

- つねに (粘性がどんなに小さくても) 定常解は存在する
- 外力がなければ定常解は一意である。
- 外力があっても、粘性が十分大きければ、定常解は一意である。
- 外力があって、粘性が小さい場合は、定常解は複数存在しうる。

Naiver-Stokes 方程式の非定常問題は、特に 3 次元の場合、いわゆるクレイ研究所のミレニアム問題にも採用された、折り紙つきの難問である。

B 高次要素 B.1 P2 要素

2変数 x, y の2次多項式とは

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + px + qy + r$$

の形をしている。2次多項式全体の集合は6次元の線形空間である。

多角形領域を三角形の要素に分割する。全体で連続、各三角形上で2次多項式と一致する関数を**区分的2次多項式**と呼ぶ。三角形 K 上の2次多項式全体を $P^2(K)$ と表す。

三角形 K の頂点を P_1, P_2, P_3 とし、それぞれの対辺の中点を P_4, P_5, P_6 とする。また、面積座標を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とする (以前の L_1, L_2, L_3)。すなわち λ_i は1次多項式で、

$$(21) \quad \lambda_i(P_j) = \delta_{ij} \quad (i, j \in \{1, 2, 3\}).$$

$$\phi_1 := \lambda_1(2\lambda_1 - 1), \quad \phi_2 := \lambda_2(2\lambda_2 - 1), \quad \phi_3 := \lambda_3(2\lambda_3 - 1),$$

$$\phi_4 := 4\lambda_2\lambda_3, \quad \phi_5 := 4\lambda_3\lambda_1, \quad \phi_6 := 4\lambda_1\lambda_2$$

とおく。これらはすべて2次多項式であり、次式を満たす。

$$\phi_i(P_j) = \delta_{ij} \quad (i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}).$$

$\{\phi_i\}_{i=1}^6$ は $P^2(K)$ の基底であり、任意の $v \in P^2(K)$ は次のように表される。

$$v = \sum_{i=1}^6 v(P_i)\phi_i.$$

(準備中)

参考文献

- [1] 桂田祐史：流体力学の方程式に対する有限要素法, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/library/fem/fem-for-fluid.pdf> (2009～).
- [2] Hecht, F.: Freefem++, <https://doc.freefem.org/pdf/FreeFEM-documentation.pdf>, 以前は <http://www3.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf> にあった。
- [3] 岡本久：ナヴィエ・ストークス方程式の数理, 東京大学出版会 (2009).
- [4] O. A. ラジゼンスカヤ：非圧縮粘性流の数学的理論, 産業図書 (1979), 藤田宏 竹下彬訳.
- [5] 岡本久：非線形力学 第I部「流体の運動と力学系」, 岩波書店 (1995), 岩波講座応用数学の分冊.