

応用数値解析特論 第6回

～2次元 Poisson 方程式に対する有限要素法 (2)

かつらだ まさし
桂田 祐史

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/ana/>

2020年10月26日

- 1 本日の内容・今後の予定など
- 2 2次元の有限要素法 (続き)
 - 近似方程式の組み立て — 直接剛性法
 - 連立1次方程式の具体例
 - プログラム
 - 方程式を立てるのに必要なもの
 - サンプルプログラム紹介
- 3 参考文献

本日の内容・今後の予定など

- 菊地 [?] 第5章に従い、空間2次元の有限要素法 (2回目) で直接剛性法の解説を行なう。
- 菊地 [?] 第7章に掲載されていたサンプル FORTRAN プログラムを、C言語に翻訳したものを紹介する。実際に動作させて説明するのは、次回になる。
- 次回 (来週は大学祭週間なので11月9日) からしばらく FreeFem++ を用いた数値実験を行なう。

(スライドで説明しているため、例年よりも早く進行できると考えていましたが、実際にやってみると意外に時間のかかる面もあり、結局は例年とあまり変わらなくなっています。座学が長く続いてしまったことは、反省しています。)

前回にどこまで出来ていたか思い出す

弱形式は次の方程式と同値である。

$$(5.10) \quad \sum_{k=1}^{N_e} \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \sum_{k=1}^{N_e} (f, \hat{v})_{e_k} + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

本日の取り決め: (時間の都合上) $g_2 = 0$ とする。(5.10) の右辺第 2 項 = 0.

任意の要素 e_k に注目し、 e_k に含まれる節点に反時計回りに N_0, N_1, N_2 と番号 (局所節点番号) をつけ

$$u^i = \hat{u}(N_i), \quad v^j = \hat{v}(N_j) \quad (i = 0, 1, 2),$$

$$\mathbf{u}_k = (u^0 u^1 u^2)^\top, \quad \mathbf{v}_k = (v^0 v^1 v^2)^\top$$

とおいた。

3次元ベクトル \mathbf{f}_k , 3次正方行列 A_k で

$$(5.13) \quad \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \mathbf{v}_k^\top A_k \mathbf{u}_k, \quad (f, \hat{v})_{e_k} = \mathbf{v}_k^\top \mathbf{f}_k$$

を満たすものを求めた (要素自由項ベクトル, 要素係数行列 と呼ぶことにした)。

5.4 近似方程式の組み立て — 直接剛性法 行列・ベクトルの拡大

前小節 (§5.3) で与えたベクトル、行列を m 次元に拡大する。まず、 $u_i := \hat{u}(P_i)$, $v_i := \hat{v}(P_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) として、次のようにおく。

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}.$$

有限要素 e_k ($k = 1, 2, \dots, N_e$) の節点 N_0, N_1, N_2 に対して、

$$N_0 = P_{i_{k,0}}, \quad N_1 = P_{i_{k,1}}, \quad N_2 = P_{i_{k,2}}$$

となる整数 $i_{k,0}, i_{k,1}, i_{k,2}$ を取る (これらを**全体節点番号**と呼ぶ)。

このとき \mathbf{u}_k の成分 $u^0 = \hat{u}(N_0)$, $u^1 = \hat{u}(N_1)$, $u^2 = \hat{u}(N_2)$ について

$$u^0 = u_{i_{k,0}}, \quad u^1 = u_{i_{k,1}}, \quad u^2 = u_{i_{k,2}}$$

が成り立つ。

5.4 直接剛性法 行列・ベクトルの拡大

$\mathbf{f}_k = (f_0^{(k)} f_1^{(k)} f_2^{(k)})^\top$ である。これを m 次元ベクトル \mathbf{f}_k^* に拡大する。

$\mathbf{f}_k^* \in \mathbb{R}^m$ を $i_{k,0}$ 成分 = $f_0^{(k)}$, $i_{k,1}$ 成分 = $f_1^{(k)}$, $i_{k,2}$ 成分 = $f_2^{(k)}$ で、それ以外の成分はすべて 0 であるようなベクトルとする。

例えば $i_0^{(k)} < i_1^{(k)} < i_2^{(k)}$ ならば

$$\mathbf{f}_k^* = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \downarrow & & & & & & & & & \\ & 0 & \cdots & 0 & f_0^{(k)} & 0 & \cdots & 0 & f_1^{(k)} & 0 & \cdots & 0 & f_2^{(k)} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^\top.$$

このように定義すると、

$$(1) \quad (f, \hat{\mathbf{v}})_{e_k} = \mathbf{v}_k^\top \mathbf{f}_k = \mathbf{v}^\top \mathbf{f}_k^* \quad (k = 1, 2, \dots, N_e).$$

5.4 直接剛性法 行列・ベクトルの拡大

同様の考え方で、3次正方行列 $A_k = (A_{ij}^{(k)})$ を、 m 次正方行列 $A_k^* = (a_{ij}^{(k)})$ に

$$\begin{aligned} a_{i_{k,0}i_{k,0}}^{(k)} &= A_{00}^{(k)}, & a_{i_{k,0}i_{k,1}}^{(k)} &= A_{01}^{(k)}, & a_{i_{k,0}i_{k,2}}^{(k)} &= A_{02}^{(k)}, \\ a_{i_{k,1}i_{k,0}}^{(k)} &= A_{10}^{(k)}, & a_{i_{k,1}i_{k,1}}^{(k)} &= A_{11}^{(k)}, & a_{i_{k,1}i_{k,2}}^{(k)} &= A_{12}^{(k)}, \\ a_{i_{k,2}i_{k,0}}^{(k)} &= A_{20}^{(k)}, & a_{i_{k,2}i_{k,1}}^{(k)} &= A_{21}^{(k)}, & a_{i_{k,2}i_{k,2}}^{(k)} &= A_{22}^{(k)}, \\ && \text{それ以外} &= 0 \end{aligned}$$

として拡大する。例えば $i_{k,0} < i_{k,1} < i_{k,2}$ ならば

$$A_k^* = \begin{pmatrix} i_{k,0} & i_{k,1} & i_{k,2} & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ A_{00}^{(k)} & A_{01}^{(k)} & A_{02}^{(k)} & \leftarrow i_{k,0} & \\ A_{10}^{(k)} & A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & \leftarrow i_{k,1} & \\ A_{20}^{(k)} & A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} & \leftarrow i_{k,2} & \end{pmatrix} \quad (\text{書いてないとこは0}).$$

これを用いると

$$(2) \quad \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \mathbf{v}_k^\top A_k \mathbf{u}_k = \mathbf{v}^\top A_k^* \mathbf{u} \quad (k = 1, 2, \dots, N_e).$$

5.4 直接剛性法 全体係数行列と全体自由項ベクトル

ゆえに弱形式 (5.10) は

$$\sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{v}^\top A_k^* \mathbf{u} = \sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{v}^\top \mathbf{f}_k^*$$

すなわち

$$\mathbf{v}^\top \left(\sum_{k=1}^{N_e} A_k^* \mathbf{u} - \sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{f}_k^* \right) = 0$$

と同値になる。

そこで

$$\mathbf{A}^* := \sum_{k=1}^{N_e} A_k^*, \quad \mathbf{f}^* := \sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{f}_k^*$$

とおけば

$$(3) \quad \mathbf{v}^\top (\mathbf{A}^* \mathbf{u} - \mathbf{f}^*) = 0.$$

5.4 直接剛性法 全体係数行列と全体自由項ベクトル

ここで \mathbf{v} は

$$Y := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m; v_i = 0 \quad (P_i \in \Gamma_1 \text{ なる } i) \right\}$$

の任意の元であるから、(3) は次と同値である。

$$\mathbf{A}^* \mathbf{u} - \mathbf{f} \in Y^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m; w_i = 0 \quad (P_i \notin \Gamma_1 \text{ なる } i) \right\}$$

すなわち

$$(4) \quad \mathbf{A}^{**} \mathbf{u} = \mathbf{f}^{**}.$$

ここで

$\mathbf{A}^{**} := \mathbf{A}^*$ の第 i 行 ($P_i \in \Gamma_1$ なる i) を除いた行列,

$\mathbf{f}^{**} := \mathbf{f}^*$ の第 i 成分 ($P_i \in \Gamma_1$ なる i) を除いた縦ベクトル.

5.4 直接剛性法 全体係数行列と全体自由項ベクトル

ゆえに

$$A\mathbf{u}^* = \mathbf{f},$$

ただし

$\mathbf{u}^* := \mathbf{u}$ の第 i 成分 ($P_i \in \Gamma_1$ なる i) を除いた縦ベクトル,

$A := A^{**}$ の第 i 列 ($P_i \in \Gamma_1$ なる i) を除いた正方行列,

$$\mathbf{f} := \mathbf{f}^{**} - \sum_{P_i \in \Gamma_1 \text{ なる } i} \mathbf{a}_i u_i.$$

($P_i \in \Gamma_1$ となる i について $u_i = \hat{u}(P_i) = g_1(P_i)$ は既知であり、未知数に含める必要はない。)

5.5 連立1次方程式の具体例

簡単な問題に対する有限要素法の連立1次方程式を実際に求めてみよう。

$$\Omega = (0, 1) \times (0, 1),$$

$$\Gamma_1 = \{(x, y); x = 0, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, y = 0\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y); x = 1, 0 < y \leq 1\} \cup \{(x, y); 0 < x \leq 1, y = 1\},$$

$$g_1 \equiv 0, \quad g_2 \equiv 0, \quad f \equiv \text{定数関数 } \bar{f}.$$

すなわち

$$-\Delta u = \bar{f} \quad (\text{in } \Omega), \quad u = 0 \quad \text{on } \Gamma_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{on } \Gamma_2.$$

5.5 連立1次方程式の具体例

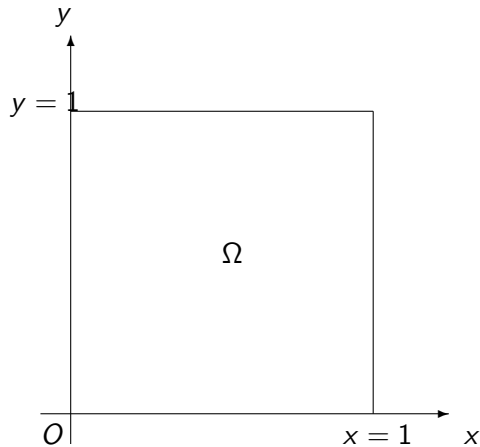


図 1: 領域 Ω

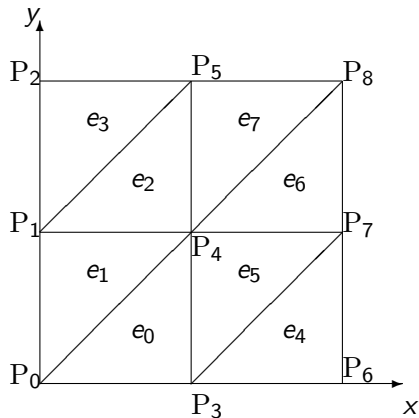


図 2: 要素分割

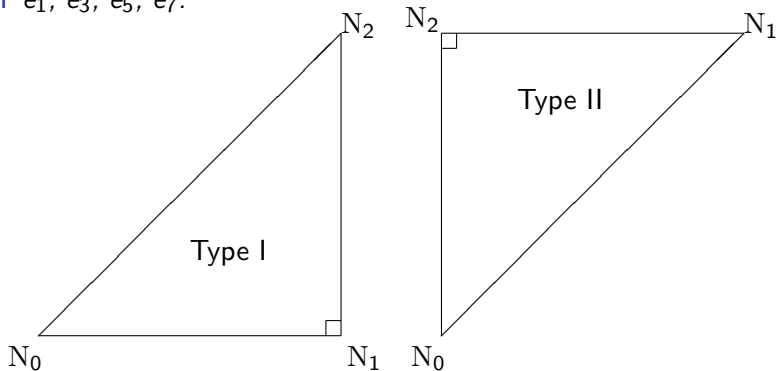
5.5 連立1次方程式の具体例

正方形領域 Ω を図2のように3角形要素によって要素分割する。

有限要素は次の二つのタイプがある (タイプ I, II と呼ぶことにする)。各々に図3のように局所節点番号をつける (左下から反時計回り)。

タイプ I e_0, e_2, e_4, e_6 .

タイプ II e_1, e_3, e_5, e_7 .



5.5 連立1次方程式の具体例

タイプが同じならば、要素係数行列 A_k , 要素自由項ベクトル \mathbf{f}_k が等しいことはすぐ分かる。それぞれ $A_I, A_{II}, \mathbf{f}_I, \mathbf{f}_{II}$ で表すことにする。

タイプIについては

$$D = h^2, \quad S = \frac{h^2}{2},$$
$$A_I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_I = \frac{\bar{f}h^2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

タイプIIについては

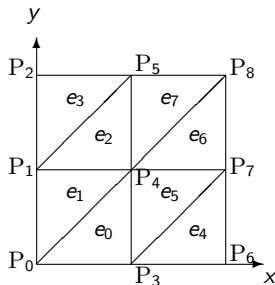
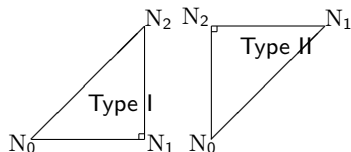
$$D = h^2, \quad S = \frac{h^2}{2},$$
$$A_{II} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_{II} = \frac{\bar{f}h^2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.5 連立1次方程式の具体例

これらから、全体的な近似方程式を作ろう。

そのために局所的な節点番号と、全体的な節点番号の対応づけが必要である。そこで以下のような対応表を用意する。

要素	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
要素タイプ	I	II	I	II	I	II	I	II
N_0 の全体節点番号	0	0	1	1	3	3	4	4
N_1 の全体節点番号	3	4	4	5	6	7	7	8
N_2 の全体節点番号	4	1	5	2	7	4	8	5



5.5 連立1次方程式の具体例

これから Galerkin 法の弱形式は

$$\mathbf{v}^\top \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \mathbf{v}^\top \frac{\bar{f}h^2}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

for

$$\forall \mathbf{v} \in \{(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8)^\top \in \mathbb{R}^9; v_0 = v_1 = v_2 = v_3 = v_6 = 0\}.$$

5.5 連立1次方程式の具体例 Dirichlet境界条件の考慮

$P_i \in \Gamma_1$ となる i について (今の場合 $i = 0, 1, 2, 3, 6$)、第 i 行は削除してよい。

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \frac{\bar{f}h^2}{6} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

また $P_i \in \Gamma_1$ となる i について、 $u_i = g_1(P_i) (= 0)$ 。これを代入して移項すると

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \frac{\bar{f}h^2}{6} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1/2 \\ -1 & 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f}h^2 \\ \bar{h}^2/2 \\ \bar{f}h^2/2 \\ \bar{f}h^2/3 \end{pmatrix}.$$

5.5 連立1次方程式の具体例 Dirichlet境界条件の考慮

上のやり方では、係数行列とベクトルが“縮小”される。例えば MATLAB では、 $(0, 1, 2, 3, 6)$, $(4, 5, 7, 8)$ という添字ベクトルを用意すれば、全体係数行列と全体自由項ベクトルを求めるのは容易である。

Dirichlet 境界条件の処理には他のやり方もある。

ベクトル、行列の縮小を避ける方法 (1)

$P_i \in \Gamma_1$ となる i に対して、 i 番目の方程式を $u_i = g_1(P_i)$ で置き換え (係数行列の第 i 行を \mathbf{e}_i^T で置き換える)、係数行列の i 列に 0 でない要素があれば、それと $g_1(P_i)$ との積を右辺に移項する (係数行列の第 i 列は \mathbf{e}_i で置き換えられる)。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(P_0) \\ g_1(P_1) \\ g_1(P_2) \\ g_1(P_3) \\ \bar{f}h^2 \\ \bar{f}h^2/2 \\ g_1(P_6) \\ \bar{f}h^2/2 \\ \bar{f}h^2/3 \end{pmatrix} .$$

5.5 連立1次方程式の具体例 Dirichlet境界条件の考慮

(説明のため、Galerkin法の弱形式を再度掲示)

$$\mathbf{v}^T \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \mathbf{v}^T \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{pmatrix}$$

for

$$\forall \mathbf{v} \in \{(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6, \mathbf{v}_7, \mathbf{v}_8)^T \in \mathbb{R}^9; \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_6 = 0\}.$$

ベクトル、行列の縮小を避ける方法 (2) (FreeFem++で採用?)

$P_i \in \Gamma_1$ となる i に対して、行列の (i, i) 成分を “terrible great value” tgv ($= 10^{30}$) で置き換え、右辺のベクトルの第 i 成分を $\text{tgv} \times g_1(P_i)$ で置き換える。方程式が近似方程式に置き換わってしまうが、以下の利点がある。

- 解は実質的にほぼ変わらない。
- 行列、ベクトルの縮小は不要。
- 係数行列の対称性は保たれる。
- コーディングの負担(手間)が少ない。

5.5 連立1次方程式の具体例 Dirichlet境界条件の考慮

T を $\text{tgv} (= 10^{30})$ として

$$\begin{pmatrix} T & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & T & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & T & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & T & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & T & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tg_1(P_0) \\ Tg_1(P_1) \\ Tg_1(P_2) \\ Tg_1(P_3) \\ f_4 \\ f_5 \\ Tg_1(P_6) \\ f_7 \\ f_8 \end{pmatrix}$$

5.6 プログラム 5.6.1 方程式を立てるのに必要なもの

有限要素解を計算するため (連立 1 次方程式を立てるため)、何が必要か、まとめておこう。

上の例では

- 節点の座標 ($i = 1, \dots, m$ に対して P_i の座標 (x_i, y_i))
- Γ_1 上にある節点の全体節点番号
- 各要素 e_k を構成する節点の全体節点番号 $i_{k,0}, i_{k,1}, i_{k,2}$

が必要になった。

この例では、 $f \equiv \bar{f}$ (定数), $g_1 \equiv 0$, $g_2 \equiv 0$ であったが、一般には次のものも必要になる。

- Ⓐ Ω に属する節点 P_i での f の値 $f(P_i)$
- Ⓑ Γ_2 上にある節点の全体節点番号
- Ⓒ Γ_2 上にある節点での g_2 の値
- Ⓓ Γ_1 上にある節点での g_1 の値

以上の情報があれば、Poisson 方程式の境界値問題を解くための一般的な方程式が作成できる。

5.6.2 サンプルプログラム紹介

菊地 [?] にはサンプル・プログラム (FORTRAN, C 言語) も用意されている。

[?] の初版の FORTRAN プログラムを C 言語に移植したプログラムを紹介する。長くなるので別資料として紹介する (動作チェックをするため公開は 2020/10/26 10:50 とする)。

「有限要素法のサンプル C プログラム」

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/ana/program10.pdf>

参考文献