応用数値解析特論 第6回
～2次元 Poisson 方程式に対する有限要素法 (2)

かつらだ まさし
桂田 祐史
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/ana/

2020年10月26日

目次

1. 本日の内容・今後の予定など
2. 2 次元の有限要素法 (続き)
   - 近似方程式の組み立て — 直接剛性法
   - 連立 1 次方程式の具体例
   - プログラム
     - 方程式を立てるのに必要なもの
     - サンプルプログラム紹介
3. 参考文献

本日の内容・今後の予定など

本日の内容・今後の予定など

- 菊地 [1] 第 5 章に従い、空間 2 次元の有限要素法 (2 回目) で直接剛性法の解説を行なう。

本日の内容・今後の予定など

- 菊地 [1] 第 5 章に従い、空間 2 次元の有限要素法 (2 回目) で直接剛性法の解説を行なう。
- 菊地 [1] 第 7 章に掲載されていたサンプル FORTRAN プログラムを、C 言語に翻訳したもの紹介する。実際に動作させて説明するのは、次回になる。

本日の内容・今後の予定など

- 菊地 [1] 第 5 章に従い、空間 2 次元の有限要素法 (2 回目) で直接剛性法の解説を行なう。
- 菊地 [1] 第 7 章に掲載されていたサンプル FORTRAN プログラムを、C 言語に翻訳したもの紹介する。実際に動作させて説明するのは、次回になる。
- 次回 (来週は大学祭週間なので 11 月 9 日) からしばらく FreeFem++ を用いた数値実験を行なう。

本日の内容・今後の予定など

- 菊地 [1] 第 5 章に従い、空間 2 次元の有限要素法 (2 回目) で直接剛性法の解説を行なう。
- 菊地 [1] 第 7 章に掲載されていたサンプル FORTRAN プログラムを、C 言語に翻訳したもの紹介する。実際に動作させて説明するのは、次回になる。
- 次回 (来週は大学祭週間なので 11 月 9 日) からしばらく FreeFem++ を用いた数値実験を行なう。

(スライドで説明しているため、例年よりも早く進行できると考えていましたが、実際にやってみると意外に時間のかかる面もあり、結局は例年とあまり変わらなくなっています。座学が長く続いてしまったことは、反省しています。)

前回にどこまで出来ていたか思い出す

弱形式は次の方程式と同値である。

$$\sum_{k=1}^{N_e} \langle \widehat{u}, \widehat{v} \rangle_{e_k} = \sum_{k=1}^{N_e} (f, \widehat{v})_{e_k} + [g_2, \widehat{v}] \quad (\widehat{v} \in \widehat{X}). \tag{5.10}$$

本日の取り決め: (時間の都合上) $g_2 = 0$ とする。(5.10) の右辺第 2 項 $= 0$.

前回にどこまで出来ていたか思い出す

弱形式は次の方程式と同値である。

$$\sum_{k=1}^{N_e} \langle \widehat{u}, \widehat{v} \rangle_{e_k} = \sum_{k=1}^{N_e} (f, \widehat{v})_{e_k} + [g_2, \widehat{v}] \quad (\widehat{v} \in \widehat{X}). \tag{5.10}$$

本日の取り決め: (時間の都合上) $g_2 = 0$ とする。(5.10) の右辺第 2 項 $= 0$.

任意の要素 e_k に注目し、e_k に含まれる節点に反時計回りに N_0, N_1, N_2 と番号 (局所節点番号) をつけ

$$u^i = \hat{u}(N_i), \quad v^i = \hat{v}(N_i) \quad (i = 0, 1, 2),$$

$$\boldsymbol{u}_k = (u^0 u^1 u^2)^\top, \quad \boldsymbol{v}_k = (v^0 v^1 v^2)^\top$$

とおいた。

前回にどこまで出来ていたか思い出す

弱形式は次の方程式と同値である。

$$\sum_{k=1}^{N_e} \langle \widehat{u}, \widehat{v} \rangle_{e_k} = \sum_{k=1}^{N_e} (f, \widehat{v})_{e_k} + [g_2, \widehat{v}] \quad (\widehat{v} \in \widehat{X}). \tag{5.10}$$

本日の取り決め: (時間の都合上) $g_2 = 0$ とする。(5.10) の右辺第 2 項 $= 0$.

任意の要素 e_k に注目し、e_k に含まれる節点に反時計回りに N_0, N_1, N_2 と番号 (局所節点番号) をつけ

$$u^i = \hat{u}(N_i), \quad v^i = \hat{v}(N_i) \quad (i = 0, 1, 2),$$

$$\boldsymbol{u}_k = (u^0 u^1 u^2)^\top, \quad \boldsymbol{v}_k = (v^0 v^1 v^2)^\top$$

とおいた。

3 次元ベクトル $\boldsymbol{f}_k$, 3 次正方行列 A_k で

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \boldsymbol{v}_k^\top A_k \boldsymbol{u}_k, \quad (f, \hat{v})_{e_k} = \boldsymbol{v}_k^\top \boldsymbol{f}_k \tag{5.13}$$

を満たすものを求めた (要素自由項ベクトル, 要素係数行列 と呼ぶことにした)。

5.4 近似方程式の組み立て — 直接剛性法　行列・ベクトルの拡大

前小節 (§5.3) で与えたベクトル、行列を m 次元に拡大する。まず、$u_i := \widehat{u}(\mathrm{P}_i)$, $v_i := \widehat{v}(\mathrm{P}_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ として、次のようにおく。

$$\boldsymbol{u} := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}.$$

5.4 近似方程式の組み立て — 直接剛性法　行列・ベクトルの拡大

前小節 (§5.3) で与えたベクトル、行列を m 次元に拡大する。まず、$u_i := \widehat{u}(\mathrm{P}_i)$, $v_i := \widehat{v}(\mathrm{P}_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ として、次のようにおく。

$$\boldsymbol{u} := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}.$$

有限要素 e_k $(k = 1, 2, \cdots, N_e)$ の節点 N_0, N_1, N_2 に対して、

$$\mathrm{N}_0 = \mathrm{P}_{i_{k,0}}, \quad \mathrm{N}_1 = \mathrm{P}_{i_{k,1}}, \quad \mathrm{N}_2 = \mathrm{P}_{i_{k,2}}$$

となる整数 $i_{k,0}$, $i_{k,2}$, $i_{k,2}$ を取る (これらを**全体節点番号**と呼ぶ)。

このとき $\boldsymbol{u}_k$ の成分 $u^0 = \widehat{u}(N_0)$, $u^1 = \widehat{u}(N_1)$, $u^2 = \widehat{u}(N_2)$ について

$$u^0 = u_{i_{k,0}}, \quad u^1 = u_{i_{k,1}}, \quad u^2 = u_{i_{k,2}}$$

が成り立つ。

$\boldsymbol{f}_k = (f_0^{(k)} f_1^{(k)} f_2^{(k)})^\top$ である。これを m 次元ベクトル $\boldsymbol{f}_k^*$ に拡大する。

$\boldsymbol{f}_k^* \in \mathbb{R}^m$ を $i_{k,0}$ 成分 $= f_0^{(k)}$, $i_{k,1}$ 成分 $= f_1^{(k)}$, $i_{k,2}$ 成分 $= f_2^{(k)}$ で、それ以外の成分はすべて 0 であるようなベクトルとする。

例えば $i_0^{(k)} < i_1^{(k)} < i_2^{(k)}$ ならば

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & 1 & & i_{k,0} & & i_{k,1} & & i_{k,2} & & m \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\boldsymbol{f}_k^* & = & (0 & \cdots 0 & f_0^{(k)} & 0 \cdots 0 & f_1^{(k)} & 0 \cdots 0 & f_2^{(k)} & 0 \cdots & 0)^\top .
\end{array}
$$

5.4 直接剛性法　行列・ベクトルの拡大

$\boldsymbol{f}_k = (f_0^{(k)} f_1^{(k)} f_2^{(k)})^\top$ である。これを m 次元ベクトル $\boldsymbol{f}_k^*$ に拡大する。

$\boldsymbol{f}_k^* \in \mathbb{R}^m$ を $i_{k,0}$ 成分 $= f_0^{(k)}$, $i_{k,1}$ 成分 $= f_1^{(k)}$, $i_{k,2}$ 成分 $= f_2^{(k)}$ で、それ以外の成分はすべて 0 であるようなベクトルとする。

例えば $i_0^{(k)} < i_1^{(k)} < i_2^{(k)}$ ならば

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & & i_{k,0} & & i_{k,1} & & i_{k,2} & & m \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \boldsymbol{f}_k^* = & (0 & \cdots 0 & f_0^{(k)} & 0\cdots 0 & f_1^{(k)} & 0\cdots 0 & f_2^{(k)} & 0\cdots & 0)^\top. \end{array}$$

このように定義すると、

$$(1) \qquad (f, \widehat{v})_{e_k} = \boldsymbol{v}_k^\top \boldsymbol{f}_k = \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{f}_k^* \quad (k = 1, 2, \cdots, N_e).$$

5.4 直接剛性法　行列・ベクトルの拡大

同様の考え方で、3 次正方行列 $A_k = (A_{ij}^{(k)})$ を、m 次正方行列 $A_k^* = (a_{ij}^{(k)})$ に

$$
\begin{aligned}
&a_{i_{k,0}i_{k,0}}^{(k)} = A_{00}^{(k)}, \quad a_{i_{k,0}i_{k,1}}^{(k)} = A_{01}^{(k)}, \quad a_{i_{k,0}i_{k,2}}^{(k)} = A_{02}^{(k)},\\
&a_{i_{k,1}i_{k,0}}^{(k)} = A_{10}^{(k)}, \quad a_{i_{k,1}i_{k,1}}^{(k)} = A_{11}^{(k)}, \quad a_{i_{k,1}i_{k,2}}^{(k)} = A_{12}^{(k)},\\
&a_{i_{k,2}i_{k,0}}^{(k)} = A_{20}^{(k)}, \quad a_{i_{k,2}i_{k,1}}^{(k)} = A_{21}^{(k)}, \quad a_{i_{k,2}i_{k,2}}^{(k)} = A_{22}^{(k)},\\
&\text{それ以外} = 0
\end{aligned}
$$

として拡大する。

5.4 直接剛性法　行列・ベクトルの拡大

同様の考え方で、3 次正方行列 $A_k = (A_{ij}^{(k)})$ を、m 次正方行列 $A_k^* = (a_{ij}^{(k)})$ に

$$
\begin{aligned}
&a_{i_{k,0}i_{k,0}}^{(k)} = A_{00}^{(k)}, \quad a_{i_{k,0}i_{k,1}}^{(k)} = A_{01}^{(k)}, \quad a_{i_{k,0}i_{k,2}}^{(k)} = A_{02}^{(k)},\\
&a_{i_{k,1}i_{k,0}}^{(k)} = A_{10}^{(k)}, \quad a_{i_{k,1}i_{k,1}}^{(k)} = A_{11}^{(k)}, \quad a_{i_{k,1}i_{k,2}}^{(k)} = A_{12}^{(k)},\\
&a_{i_{k,2}i_{k,0}}^{(k)} = A_{20}^{(k)}, \quad a_{i_{k,2}i_{k,1}}^{(k)} = A_{21}^{(k)}, \quad a_{i_{k,2}i_{k,2}}^{(k)} = A_{22}^{(k)},\\
&\text{それ以外} = 0
\end{aligned}
$$

として拡大する。例えば $i_{k,0} < i_{k,1} < i_{k,2}$ ならば

$$
A_k^* = \begin{array}{cc}
\begin{array}{ccc} i_{k,0} & i_{k,1} & i_{k,2} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
A_{00}^{(k)} & A_{01}^{(k)} & A_{02}^{(k)} \\
A_{10}^{(k)} & A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\
A_{20}^{(k)} & A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)}
\end{pmatrix} &
\begin{array}{c} \leftarrow i_{k,0} \\ \leftarrow i_{k,1} \\ \leftarrow i_{k,2} \end{array}
\end{array}
$$

(書いてないところは 0).

5.4 直接剛性法　行列・ベクトルの拡大

同様の考え方で、3 次正方行列 $A_k=(A_{ij}^{(k)})$ を、m 次正方行列 $A_k^*=(a_{ij}^{(k)})$ に

$$
\begin{aligned}
&a_{i_{k,0}i_{k,0}}^{(k)}=A_{00}^{(k)}, \quad a_{i_{k,0}i_{k,1}}^{(k)}=A_{01}^{(k)}, \quad a_{i_{k,0}i_{k,2}}^{(k)}=A_{02}^{(k)},\\
&a_{i_{k,1}i_{k,0}}^{(k)}=A_{10}^{(k)}, \quad a_{i_{k,1}i_{k,1}}^{(k)}=A_{11}^{(k)}, \quad a_{i_{k,1}i_{k,2}}^{(k)}=A_{12}^{(k)},\\
&a_{i_{k,2}i_{k,0}}^{(k)}=A_{20}^{(k)}, \quad a_{i_{k,2}i_{k,1}}^{(k)}=A_{21}^{(k)}, \quad a_{i_{k,2}i_{k,2}}^{(k)}=A_{22}^{(k)},\\
&\text{それ以外}=0
\end{aligned}
$$

として拡大する。例えば $i_{k,0}<i_{k,1}<i_{k,2}$ ならば

$$
A_k^*=
\begin{array}{cccc}
i_{k,0} & i_{k,1} & i_{k,2} & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\end{array}
\begin{pmatrix}
A_{00}^{(k)} & A_{01}^{(k)} & A_{02}^{(k)} \\
A_{10}^{(k)} & A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\
A_{20}^{(k)} & A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)}
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\leftarrow i_{k,0}\\
\leftarrow i_{k,1}\\
\leftarrow i_{k,2}
\end{array}
\quad (\text{書いてないとこは }0).
$$

これを用いると

(2) $$\langle \widehat{u},\widehat{v}\rangle_{e_k}=\boldsymbol{v}_k^\top A_k\boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{v}^\top A_k^*\boldsymbol{u}\quad (k=1,2,\cdots,N_e).$$

5.4 直接剛性法　全体係数行列と全体自由項ベクトル

ゆえに弱形式 (5.10) は

$$\sum_{k=1}^{N_e} \boldsymbol{v}^\top A_k^* \boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{N_e} \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{f}_k^*$$

ゆえに弱形式 (5.10) は

$$\sum_{k=1}^{N_e} \boldsymbol{v}^\top A_k^* \boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{N_e} \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{f}_k^*$$

すなわち

$$\boldsymbol{v}^\top \left(\sum_{k=1}^{N_e} A_k^* \boldsymbol{u} - \sum_{k=1}^{N_e} \boldsymbol{f}_k^* \right) = 0$$

と同値になる。

ゆえに弱形式 (5.10) は

$$\sum_{k=1}^{N_e} \boldsymbol{v}^\top A_k^* \boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{N_e} \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{f}_k^*$$

すなわち

$$\boldsymbol{v}^\top \left(\sum_{k=1}^{N_e} A_k^* \boldsymbol{u} - \sum_{k=1}^{N_e} \boldsymbol{f}_k^* \right) = 0$$

と同値になる。

そこで

$$\boldsymbol{A}^* := \sum_{k=1}^{N_e} A_k^*, \quad \boldsymbol{f}^* := \sum_{k=1}^{N_e} \boldsymbol{f}_k^*$$

とおけば

(3) $$\boldsymbol{v}^\top (\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}^*) = 0.$$

ここで $\boldsymbol{v}$ は

$$Y := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m;\ v_i = 0 \quad (\mathrm{P}_i \in \Gamma_1 \text{ なる } i) \right\}$$

の任意の元であるから、

ここで $\boldsymbol{v}$ は

$$Y := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m;\ v_i = 0 \quad (\mathrm{P}_i \in \Gamma_1 \text{ なる } i) \right\}$$

の任意の元であるから、(3) は次と同値である。

$$\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f} \in Y^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m;\ w_i = 0 \quad (\mathrm{P}_i \notin \Gamma_1 \text{ なる } i) \right\}$$

ここで $\boldsymbol{v}$ は

$$Y := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m;\ v_i = 0 \quad (\mathrm{P}_i \in \Gamma_1 \text{ なる } i) \right\}$$

の任意の元であるから、(3) は次と同値である。

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f} \in Y^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m;\ w_i = 0 \quad (\mathrm{P}_i \notin \Gamma_1 \text{ なる } i) \right\}$$

すなわち

(4) $$A^{**}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}^{**}.$$

ここで

$A^{**} := \boldsymbol{A}^*$ の第 i 行 ($\mathrm{P}_i \in \Gamma_1$ なる i) を除いた行列,

$\boldsymbol{f}^{**} := \boldsymbol{f}^*$ の第 i 成分 ($\mathrm{P}_i \in \Gamma_1$ なる i) を除いた縦ベクトル.

5.4 直接剛性法　全体係数行列と全体自由項ベクトル

ゆえに

$$A\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{f},$$

ただし

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}^* &:= \boldsymbol{u} \text{ の第 } i \text{ 成分 } (\mathrm{P}_i \in \Gamma_1 \text{ なる } i) \text{ を除いた縦ベクトル},\\
A &:= A^{**} \text{ の第 } i \text{ 列 } (\mathrm{P}_i \in \Gamma_1 \text{ なる } i) \text{ を除いた正方行列},\\
\boldsymbol{f} &:= \boldsymbol{f}^{**} - \sum_{\mathrm{P}_i \in \Gamma_1 \text{ なる } i} \boldsymbol{a}_i u_i.
\end{aligned}$$

($\mathrm{P}_i \in \Gamma_1$ となる i について $u_i = \hat{u}(\mathrm{P}_i) = g_1(\mathrm{P}_i)$ は既知であり、未知数に含める必要はない。)

5.5 連立１次方程式の具体例

簡単な問題に対する有限要素法の連立１次方程式を実際に求めてみよう。

簡単な問題に対する有限要素法の連立 1 次方程式を実際に求めてみよう。

$$\begin{aligned}
&\Omega = (0,1) \times (0,1), \\
&\Gamma_1 = \{(x,y); x = 0, 0 \le y \le 1\} \cup \{(x,y); 0 \le x \le 1, y = 0\}, \\
&\Gamma_2 = \{(x,y); x = 1, 0 < y \le 1\} \cup \{(x,y); 0 < x \le 1, y = 1\}, \\
&g_1 \equiv 0, \quad g_2 \equiv 0, \quad f \equiv \text{定数関数 } \overline{f}.
\end{aligned}$$

すなわち

$$-\triangle u = \overline{f} \quad (\text{in } \Omega), \quad u = 0 \quad \text{on } \Gamma_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \quad \text{on } \Gamma_2.$$

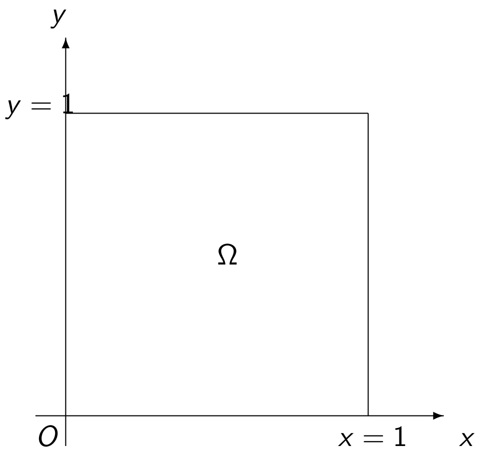


図 1: 領域 Ω

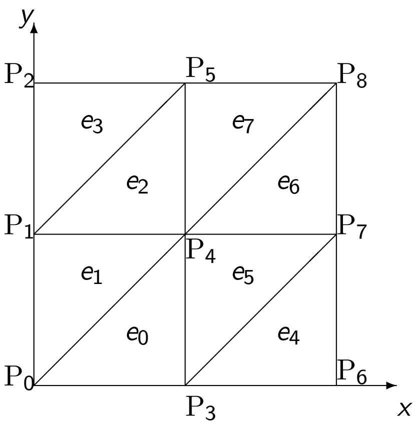


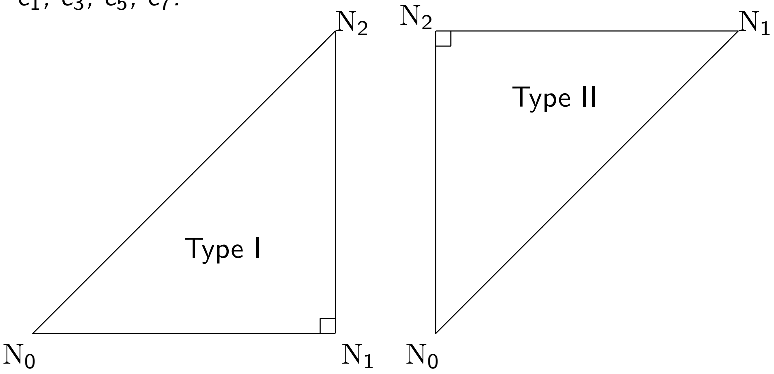
図 2: 要素分割

5.5 連立1次方程式の具体例

正方形領域 Ω を図 2 のように 3 角形要素によって要素分割する。

有限要素は次の二つのタイプがある (タイプ I, II と呼ぶことにする)。
各々に図 3 のように局所節点番号をつける (左下から反時計回り)。

タイプ I e_0, e_2, e_4, e_6.
タイプ II e_1, e_3, e_5, e_7.



タイプが同じならば、要素係数行列 A_k, 要素自由項ベクトル $\boldsymbol{f}_k$ が等しいことはすぐ分かる。それぞれ A_I, A_{II}, f_I, f_{II} で表すことにする。

タイプ I については

$$D = h^2, \quad S = \frac{h^2}{2},$$

$$A_I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_I = \frac{\overline{f}h^2}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

タイプ II については

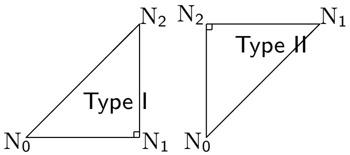
$$D = h^2, \quad S = \frac{h^2}{2},$$

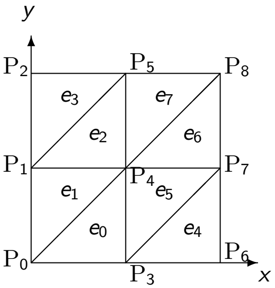
$$A_{II} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_{II} = \frac{\overline{f}h^2}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.5 連立1次方程式の具体例

これらから、全体的な近似方程式を作ろう。
そのために局所的な節点番号と、全体的な節点番号の対応づけが必要である。そこで以下のような対応表を用意する。

要素	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
要素タイプ	I	II	I	II	I	II	I	II
N_0 の全体節点番号	0	0	1	1	3	3	4	4
N_1 の全体節点番号	3	4	4	5	6	7	7	8
N_2 の全体節点番号	4	1	5	2	7	4	8	5





5.5 連立 1 次方程式の具体例

これから Galerkin 法の弱形式は

$$
\boldsymbol{v}^\top \frac{1}{2}
\begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8
\end{pmatrix}
= \boldsymbol{v}^\top \frac{\overline{f} h^2}{6}
\begin{pmatrix}
2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2
\end{pmatrix}
$$

for

$$
\forall \boldsymbol{v} \in \left\{ (v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8)^\top \in \mathbb{R}^9;\ v_0 = v_1 = v_2 = v_3 = v_6 = 0 \right\}.
$$

$P_i \in \Gamma_1$ となる i について (今の場合 $i = 0, 1, 2, 3, 6$)、第 i 行は削除してよい。

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \frac{\overline{f} h^2}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5.5 連立1次方程式の具体例　Dirichlet 境界条件の考慮

$P_i \in \Gamma_1$ となる i について (今の場合 $i = 0, 1, 2, 3, 6$)、第 i 行は削除してよい。

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \frac{\overline{f}h^2}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

また $P_i \in \Gamma_1$ となる i について、$u_i = g_1(P_i)$ $(= 0)$. これを代入して移項すると

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \frac{\overline{f}h^2}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1/2 \\ -1 & 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{f}h^2 \\ \overline{h}^2/2 \\ \overline{f}h^2/2 \\ \overline{f}h^2/3 \end{pmatrix}.$$

5.5 連立 1 次方程式の具体例　Dirichlet 境界条件の考慮

上のやり方では、係数行列とベクトルが "縮小" される。例えば MATLAB では、$(0, 1, 2, 3, 6)$, $(4, 5, 7, 8)$ という添字ベクトルを用意すれば、全体係数行列と全体自由項ベクトルを求めるのは容易である。

Dirichlet 境界条件の処理には他のやり方もある。

5.5 連立 1 次方程式の具体例　Dirichlet 境界条件の考慮

上のやり方では、係数行列とベクトルが "縮小" される。例えば MATLAB では、(0, 1, 2, 3, 6), (4, 5, 7, 8) という添字ベクトルを用意すれば、全体係数行列と全体自由項ベクトルを求めるのは容易である。

Dirichlet 境界条件の処理には他のやり方もある。

ベクトル、行列の縮小を避ける方法 (1)
$P_i \in \Gamma_1$ となる i に対して、i 番目の方程式を $u_i = g_1(P_i)$ で置き換え (係数行列の第 i 行を $\boldsymbol{e}_i^\top$ で置き換える)、係数行列の i 列に 0 でない要素があれば、それと $g_1(P_i)$ との積を右辺に移項する (係数行列の第 i 列は $\boldsymbol{e}_i$ で置き換えられる)。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(\mathrm{P}_0) \\ g_1(\mathrm{P}_1) \\ g_1(\mathrm{P}_2) \\ g_1(\mathrm{P}_3) \\ \overline{f} h^2 \\ \overline{f} h^2/2 \\ g_1(\mathrm{P}_6) \\ \overline{f} h^2/2 \\ \overline{f} h^2/3 \end{pmatrix}.$$

(説明のため、Galerkin 法の弱形式を再度掲示)

$$\boldsymbol{v}^\top \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}^\top \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{pmatrix}$$

for

$$\forall \boldsymbol{v} \in \left\{ (v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8)^\top \in \mathbb{R}^9;\ v_0 = v_1 = v_2 = v_3 = v_6 = 0 \right\}.$$

ベクトル、行列の縮小を避ける方法 (2) (FreeFem++で採用？)
$P_i \in \Gamma_1$ となる i に対して、行列の (i,i) 成分を "terrible great value" tgv $(= 10^{30})$ で置き換え、右辺のベクトルの第 i 成分を $\mathtt{tgv} \times g_1(P_i)$ で置き換える。方程式が近似方程式に置き換わってしまうが、以下の利点がある。

- 解は実質的にほぼ変わらない。
- 行列、ベクトルの縮小は不要。
- 係数行列の対称性は保たれる。
- コーディングの負担 (手間) が少ない。

T を tgv $(= 10^{30})$ として

$$\boldsymbol{v}^\top \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}^\top \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{pmatrix}$$

for

$$\forall \boldsymbol{v} \in \left\{ \left(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\right)^\top \in \mathbb{R}^9;\ v_0 = v_1 = v_2 = v_3 = v_6 = 0 \right\}.$$

T を tgv $(= 10^{30})$ として

$$\begin{pmatrix} T & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & T & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & T & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & T & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & T & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tg_1(P_0) \\ Tg_1(P_1) \\ Tg_1(P_2) \\ Tg_1(P_3) \\ f_4 \\ f_5 \\ Tg_1(P_6) \\ f_7 \\ f_8 \end{pmatrix}$$

有限要素解を計算するため (連立 1 次方程式を立てるため)、何が必要か、まとめておこう。

上の例では

- 節点の座標 ($i=1,\cdots,m$ に対して P_i の座標 (x_i,y_i))
- Γ_1 上にある節点の全体節点番号
- 各要素 e_k を構成する節点の全体節点番号 $i_{k,0}$, $i_{k,1}$, $i_{k,2}$

が必要になった。

有限要素解を計算するため (連立 1 次方程式を立てるため)、何が必要か、まとめておこう。

上の例では

- 節点の座標 ($i = 1, \cdots, m$ に対して P_i の座標 (x_i, y_i))
- Γ_1 上にある節点の全体節点番号
- 各要素 e_k を構成する節点の全体節点番号 $i_{k,0}$, $i_{k,1}$, $i_{k,2}$

が必要になった。

この例では、$f \equiv \overline{f}$ (定数), $g_1 \equiv 0$, $g_2 \equiv 0$ であったが、一般には次のものも必要になる。

a. Ω に属する節点 P_i での f の値 $f(P_i)$
b. Γ_2 上にある節点の全体節点番号
c. Γ_2 上にある節点での g_2 の値
d. Γ_1 上にある節点での g_1 の値

有限要素解を計算するため (連立 1 次方程式を立てるため)、何が必要か、まとめておこう。

上の例では

- 節点の座標 ($i = 1, \cdots, m$ に対して P_i の座標 (x_i, y_i))
- Γ_1 上にある節点の全体節点番号
- 各要素 e_k を構成する節点の全体節点番号 $i_{k,0}$, $i_{k,1}$, $i_{k,2}$

が必要になった。

この例では、$f \equiv \overline{f}$ (定数), $g_1 \equiv 0$, $g_2 \equiv 0$ であったが、一般には次のものも必要になる。

(a) Ω に属する節点 P_i での f の値 $f(P_i)$
(b) Γ_2 上にある節点の全体節点番号
(c) Γ_2 上にある節点での g_2 の値
(d) Γ_1 上にある節点での g_1 の値

以上の情報があれば、Poisson 方程式の境界値問題を解くための一般的な方程式が作成できる。

5.6.2 サンプルプログラム紹介

菊地 [1] にはサンプル・プログラム (FORTRAN, C 言語) も用意されている。

[1] の初版の FORTRAN プログラムを C 言語に移植したプログラムを紹介する。長くなるので別資料として紹介する (動作チェックをするため公開は 2020/10/26 10:50 とする)。

「有限要素法のサンプル C プログラム」

`http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/ana/program10.pdf`

参考文献

[1] 菊地文雄：有限要素法概説, サイエンス社 (1980), 新訂版 1999.