

応用数値解析特論 第2回

～Poisson 方程式の境界値問題の弱定式化～

かつらだ まさし
桂田 祐史

[http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/
ouyousuuchikaisekitokuron-2020/](http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/ouyousuuchikaisekitokuron-2020/)

2020 年 9 月 28 日

目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 Poisson 方程式の境界値問題の弱定式化
 - 数学的準備
 - Green の定理
 - 変分法の基本補題
 - 広義導関数、超関数微分、Sobolev 空間
 - Poisson 方程式の境界値問題
 - 弱定式化 — 弱解の方法
 - 変分原理
- 3 付録
- 4 参考文献

本日の内容・連絡事項

アンケート 履修者名簿に載っている 8 名のうち、6 名 (2020/9/27 19:00 現在) の人からアンケートが届いています (ありがとう)。残り 2 名の人も出してもらえると良いのだけど…オフィス・アワーをいつにするか、他の科目の学生の意見も見ってからにするので、少し待ってください。

今日の話は

(現象数理学科の「応用複素関数」を履修した人は、今日 (と次回の半分) の話は 80% 位は聴いたことがあるはず。でもそれをしっかり覚えている人は少数派だと思うので、ゆっくりやります。種本は前回言ったように菊地 [1] です。)

本日の内容・連絡事項

アンケート 履修者名簿に載っている 8 名のうち、6 名 (2020/9/27 19:00 現在) の人からアンケートが届いています (ありがとう)。残り 2 名の人も出してもらえると良いのだけど…オフィス・アワーをいつにするか、他の科目の学生の意見も見ってからにするので、少し待ってください。

今日の話は

(現象数理学科の「応用複素関数」を履修した人は、今日 (と次回の半分) の話は 80% 位は聴いたことがあるはず。でもそれをしっかり覚えている人は少数派だと思うので、ゆっくりやります。種本は前回言ったように菊地 [1] です。)

有限要素法を用いる際に必ず必要になるのが、解こうとしている問題の**弱形式**である。

本日の内容・連絡事項

アンケート 履修者名簿に載っている 8 名のうち、6 名 (2020/9/27 19:00 現在) の人からアンケートが届いています (ありがとう)。残り 2 名の人も出してもらえると良いのだけど…オフィス・アワーをいつにするか、他の科目の学生の意見も見ってからにするので、少し待ってください。

今日の話は

(現象数理学科の「応用複素関数」を履修した人は、今日 (と次回の半分) の話は 80% 位は聴いたことがあるはず。でもそれをしっかり覚えている人は少数派だと思うので、ゆっくりやります。種本は前回言ったように菊地 [1] です。)

有限要素法を用いる際に必ず必要になるのが、解こうとしている問題の**弱形式**である。

現代の解析学では、微分方程式を扱うために**弱解の方法**, **弱定式化**を用いることが多い。弱形式は、そこに現れる “方程式” (あるいは方程式代わりの条件) と言える。

本日の内容・連絡事項

アンケート 履修者名簿に載っている 8 名のうち、6 名 (2020/9/27 19:00 現在) の人からアンケートが届いています (ありがとう)。残り 2 名の人も出してもらえると良いのだけど…オフィス・アワーをいつにするか、他の科目の学生の意見も見ってからにするので、少し待ってください。

今日の話は

(現象数理学科の「応用複素関数」を履修した人は、今日 (と次回の半分) の話は 80% 位は聴いたことがあるはず。でもそれをしっかり覚えている人は少数派だと思うので、ゆっくりやります。種本は前回言ったように菊地 [1] です。)

有限要素法を用いる際に必ず必要になるのが、解こうとしている問題の**弱形式**である。

現代の解析学では、微分方程式を扱うために**弱解の方法**, **弱定式化**を用いることが多い。弱形式は、そこに現れる “方程式” (あるいは方程式代わりの条件) と言える。

今回は基本的な **Poisson 方程式の境界値問題を題材として、弱解の方法を説明**する。弱形式の求め方をマスターするには、ある程度の慣れ (練習) が必要であるが、今日は 2 度目の遭遇ということになる (最初は前回の Laplace 方程式に対する Dirichlet 原理 … 今回の話は、前回の話のマイナー・バージョンアップとも言える)。第 3,4 弾を用意している…

本日の内容・連絡事項

アンケート 履修者名簿に載っている 8 名のうち、6 名 (2020/9/27 19:00 現在) の人からアンケートが届いています (ありがとう)。残り 2 名の人でも出してもらえると良いのだけど…オフィス・アワーをいつにするか、他の科目の学生の意見も見てからにするので、少し待ってください。

今日の話は

(現象数理学科の「応用複素関数」を履修した人は、今日 (と次回の半分) の話は 80% 位は聴いたことがあるはず。でもそれをしっかり覚えている人は少数派だと思うので、ゆっくりやります。種本は前回言ったように菊地 [1] です。)

有限要素法を用いる際に必ず必要になるのが、解こうとしている問題の**弱形式**である。

現代の解析学では、微分方程式を扱うために**弱解の方法**, **弱定式化**を用いることが多い。弱形式は、そこに現れる “方程式” (あるいは方程式代わりの条件) と言える。

今回は基本的な **Poisson 方程式の境界値問題を題材として、弱解の方法を説明**する。弱形式の求め方をマスターするには、ある程度の慣れ (練習) が必要であるが、今日は 2 度目の遭遇ということになる (最初は前回の Laplace 方程式に対する Dirichlet 原理 … 今回の話は、前回の話のマイナー・バージョンアップとも言える)。第 3,4 弾を用意している…

ちなみに、弱解の方法を数学としてきちんと学ぶには、関数解析のテキストである Brezis [2], [3] がお勧めである。

2 Poisson 方程式の境界値問題の弱定式化

この科目の前半は、**楕円型**偏微分方程式の境界値問題に対する有限要素法について説明する。

2 Poisson 方程式の境界値問題の弱定式化

この科目の前半は、**楕円型**偏微分方程式の境界値問題に対する有限要素法について説明する。

(内緒話: 楕円型という言葉の説明は偏微分方程式の講義に譲るが、大まかに言って「どの変数についても同じようになっている」ということである。時刻変数を含まない、定常状態を表すような方程式は楕円型になることが多い。物理に良く出て来る「一様で等方的」という条件を満たす数理モデルの多くに、**Laplacian** $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ という微分作用素が現れるが、これは典型的な楕円型微分作用素である。

Cf. 熱方程式は**放物型**方程式、波動方程式は**双曲型**方程式である。)

2 Poisson 方程式の境界値問題の弱定式化

この科目の前半は、**楕円型**偏微分方程式の境界値問題に対する有限要素法について説明する。

(内緒話: 楕円型という言葉の説明は偏微分方程式の講義に譲るが、大まかに言って「どの変数についても同じようになっている」ということである。時刻変数を含まない、定常状態を表すような方程式は楕円型になることが多い。物理に良く出て来る「一様で等方的」という条件を満たす数理モデルの多くに、**Laplacian** $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ という微分作用素が現れるが、これは典型的な楕円型微分作用素である。

Cf. 熱方程式は**放物型**方程式、波動方程式は**双曲型**方程式である。)

弱定式化を説明する例題として

- もっとも基本的な楕円型偏微分方程式である Poisson 方程式
- 境界条件としては、頻出する Dirichlet 境界条件と Neumann 境界条件の両方

2.1 数学的準備 2.1.1 Green の定理

定理 2.1 (Green の定理)

Ω は Gauss の発散定理が成り立つような $\mathbb{R}^n$ の有界領域で、 Γ はその境界、 $\mathbf{n}$ は Γ 上の点における外向き単位法線ベクトルとする。また $d\sigma$ は面積要素とする。 u と v が $\overline{\Omega}$ の近傍でそれぞれ C^2 級, C^1 級であれば

$$\int_{\Omega} \Delta u \, v \, dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

が成り立つ。ここで

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(x + \varepsilon \mathbf{n}) - u(x)}{\varepsilon} = \nabla u(x) \cdot \mathbf{n},$$

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^{\top}, \quad \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j}.$$

証明のあらすじ $\mathbf{f} := v \nabla u$ に Gauss の発散定理

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx = \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

を適用する。 $\operatorname{div} \mathbf{f} = \nabla u \cdot \nabla v + \Delta u \, v$, $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v$ であることに注意する。

2.1.2 変分法の基本補題

変分法の基本補題とは、大まかに言うと、 Ω で定義された関数 u が、“任意の” φ に対して

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0$$

を満たすならば、 Ω で $u = 0$ が成り立つ、という定理である。

2.1.2 変分法の基本補題

変分法の基本補題とは、大まかに言うと、 Ω で定義された関数 u が、“任意の” φ に対して

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0$$

を満たすならば、 Ω で $u = 0$ が成り立つ、という定理である。

u が連続関数であれば、比較的簡単な証明があるが、後のことを考えると、より一般的な状況設定で証明したい。

2.1.2 変分法の基本補題

変分法の基本補題とは、大まかに言うと、 Ω で定義された関数 u が、“任意の” φ に対して

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0$$

を満たすならば、 Ω で $u = 0$ が成り立つ、という定理である。

u が連続関数であれば、比較的簡単な証明があるが、後のことを考えると、より一般的な状況設定で証明したい。

u については、なるべく緩い条件 (多くの関数を許す) で、 φ についてはなるべく強い条件 (より少ない φ … 弱い仮定) で示すのが良い。そういう観点から、いくつかあるバージョンのうち、定理 2.2 を紹介する。

2.1.2 変分法の基本補題

変分法の基本補題の 1 バージョンとして、定理 2.2 を紹介する。それを説明するのに、 $C_0^\infty(\Omega)$ という記号と、局所可積分という言葉が必要である。前者を頭の片隅に入れよう。

2.1.2 変分法の基本補題

変分法の基本補題の 1 バージョンとして、定理 2.2 を紹介する。それを説明するのに、 $C_0^\infty(\Omega)$ という記号と、局所可積分という言葉が必要である。前者を頭の片隅に入れよう。

- $\mathbb{R}^n$ の部分集合 K がコンパクトであるとは、 K が $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合であることをいう。

2.1.2 変分法の基本補題

変分法の基本補題の 1 バージョンとして、定理 2.2 を紹介する。それを説明するのに、 $C_0^\infty(\Omega)$ という記号と、局所可積分という言葉が必要である。前者を頭の片隅に入れよう。

- $\mathbb{R}^n$ の部分集合 K がコンパクトであるとは、 K が $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合であることをいう。
- $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して、 A の閉包 $\bar{A}$ を次式で定める。

$$\bar{A} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \varepsilon > 0) B(x; \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset\}.$$

直観的に言うと、 $\bar{A}$ は A に A の縁を付け加えた集合である。

2.1.2 変分法の基本補題

変分法の基本補題の 1 バージョンとして、定理 2.2 を紹介する。それを説明するのに、 $C_0^\infty(\Omega)$ という記号と、局所可積分という言葉が必要である。前者を頭の片隅に入れよう。

- $\mathbb{R}^n$ の部分集合 K がコンパクトであるとは、 K が $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合であることをいう。
- $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して、 A の閉包 $\bar{A}$ を次式で定める。

$$\bar{A} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \varepsilon > 0) B(x; \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset\}.$$

直観的に言うと、 $\bar{A}$ は A に A の縁を付け加えた集合である。

- Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合、 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ とするとき、 u の台 (support) $\text{supp } u$ を次式で定める。

$$\text{supp } u := \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}}.$$

2.1.2 変分法の基本補題

変分法の基本補題の 1 バージョンとして、定理 2.2 を紹介する。それを説明するのに、 $C_0^\infty(\Omega)$ という記号と、局所可積分という言葉が必要である。前者を頭の片隅に入れよう。

- $\mathbb{R}^n$ の部分集合 K がコンパクトであるとは、 K が $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合であることをいう。
- $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して、 A の閉包 $\bar{A}$ を次式で定める。

$$\bar{A} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \varepsilon > 0) B(x; \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset\}.$$

直観的に言うと、 $\bar{A}$ は A に A の縁を付け加えた集合である。

- Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合、 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ とするとき、 u の台 (support) $\text{supp } u$ を次式で定める。

$$\text{supp } u := \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}}.$$

- Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする。 $C_0^\infty(\Omega)$ という関数空間を次式で定める ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$)。

$$C_0^\infty(\Omega) := \{u \mid u: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \text{ } C^\infty \text{ 級, } \text{supp } u \text{ はコンパクト集合, } \text{supp } u \subset \Omega\}.$$

(粗く言って、 Ω の境界の十分近くでは 0 となるような C^∞ 級の関数の全体。)

2.1.2 変分法の基本補題

変分法の基本補題の 1 バージョンとして、定理 2.2 を紹介する。それを説明するのに、 $C_0^\infty(\Omega)$ という記号と、局所可積分という言葉が必要である。前者を頭の片隅に入れよう。

- $\mathbb{R}^n$ の部分集合 K がコンパクトであるとは、 K が $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合であることをいう。
- $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して、 A の閉包 $\bar{A}$ を次式で定める。

$$\bar{A} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \varepsilon > 0) B(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}.$$

直観的に言うと、 $\bar{A}$ は A に A の縁を付け加えた集合である。

- Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合、 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ とするとき、 u の台 (support) $\text{supp } u$ を次式で定める。

$$\text{supp } u := \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}}.$$

- Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする。 $C_0^\infty(\Omega)$ という関数空間を次式で定める ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$)。

$$C_0^\infty(\Omega) := \{u \mid u: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \text{ } C^\infty \text{ 級, } \text{supp } u \text{ はコンパクト集合, } \text{supp } u \subset \Omega\}.$$

(粗く言って、 Ω の境界の十分近くでは 0 となるような C^∞ 級の関数の全体。)

- $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ (f が Ω で局所可積分) とは、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が可測であり、 Ω に含まれる任意のコンパクト集合 K に対して $\int_K |f(x)| dx < +\infty$ が成り立つことを言う。

Ω で連続な関数は局所可積分である: $C(\Omega) \subset L_{\text{loc}}^1(\Omega)$.

2.1.2 変分法の基本補題

定理 2.2 (変分法の基本補題)

$u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ が

$$(\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) \, dx = 0$$

を満たすならば、 u は Ω 上ほとんどいたるところ 0 に等しい: $u = 0$ a.e. in Ω .

2.1.2 変分法の基本補題

定理 2.2 (変分法の基本補題)

$u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ が

$$(\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) \, dx = 0$$

を満たすならば、 u は Ω 上ほとんどいたるところ 0 に等しい: $u = 0$ a.e. in Ω .

系 2.3 (変分法の基本補題 (連続関数バージョン))

$u \in C(\Omega)$ が

$$(\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) \, dx = 0$$

を満たすならば、 u は Ω 上いたるところ 0 に等しい:

$$(\forall x \in \Omega) \quad u(x) = 0.$$

2.1.2 変分法の基本補題

定理 2.2 (変分法の基本補題)

$u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ が

$$(\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) \, dx = 0$$

を満たすならば、 u は Ω 上ほとんどいたるところ 0 に等しい: $u = 0$ a.e. in Ω .

系 2.3 (変分法の基本補題 (連続関数バージョン))

$u \in C(\Omega)$ が

$$(\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) \, dx = 0$$

を満たすならば、 u は Ω 上いたるところ 0 に等しい:

$$(\forall x \in \Omega) \quad u(x) = 0.$$

Cf. L^2 ですべての要素と直交する元は 0

$u \in L^2(\Omega)$ が $(\forall \varphi \in L^2(\Omega)) \quad (u, \varphi) = 0$ を満たすならば、 $u = 0$ (ゆえに $u = 0$ a.e. in Ω).

2.1.3 広義導関数、超関数微分、Sobolev 空間

今回の話は、きちんとするにはかなり手間がかかる。中でも、微分の意味を拡張して議論する、というあたりが大きな問題となる。

2.1.3 広義導関数、超関数微分、Sobolev 空間

今回の話は、きちんとするにはかなり手間がかかる。中でも、微分の意味を拡張して議論する、というあたりが大きな問題となる。

定義 2.4 (広義導関数 (1 次元の場合))

Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合、 $f \in L^2(\Omega)$ とする。 $g \in L^2(\Omega)$ が f の x_j に関する **広義導関数** (超関数微分, ^{ソボレフ}Sobolev の意味での導関数) であるとは

$$(1) \quad (\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx.$$

が成り立つことをいう。

2.1.3 広義導関数、超関数微分、Sobolev 空間

今回の話は、きちんとするにはかなり手間がかかる。中でも、微分の意味を拡張して議論する、というあたりが大きな問題となる。

定義 2.4 (広義導関数 (1 次元の場合))

Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合、 $f \in L^2(\Omega)$ とする。 $g \in L^2(\Omega)$ が f の x_j に関する **広義導関数** (超関数微分, ^{ソボレフ}Sobolev の意味での導関数) であるとは

$$(1) \quad (\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx.$$

が成り立つことをいう。

f が C^1 級のとき、 $g = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ とおくと (1) は部分積分 (Gauss の発散定理) で証明できる。

2.1.3 広義導関数、超関数微分、Sobolev 空間

今回の話は、きちんとするにはかなり手間がかかる。中でも、微分の意味を拡張して議論する、というあたりが大きな問題となる。

定義 2.4 (広義導関数 (1 次元の場合))

Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合、 $f \in L^2(\Omega)$ とする。 $g \in L^2(\Omega)$ が f の x_j に関する **広義導関数** (超関数微分, ^{ソボレフ}Sobolev の意味での導関数) であるとは

$$(1) \quad (\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx.$$

が成り立つことをいう。

f が C^1 級のとき、 $g = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ とおくと (1) は部分積分 (Gauss の発散定理) で証明できる。誤解が生じる恐れがないとき、 g のことを $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ と表す (記号の濫用)。

2.1.3 広義導関数、超関数微分、Sobolev 空間

今回の話は、きちんとするにはかなり手間がかかる。中でも、微分の意味を拡張して議論する、というあたりが大きな問題となる。

定義 2.4 (広義導関数 (1 次元の場合))

Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合、 $f \in L^2(\Omega)$ とする。 $g \in L^2(\Omega)$ が f の x_j に関する **広義導関数** (超関数微分, ^{ソボレフ}Sobolev の意味での導関数) であるとは

$$(1) \quad (\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx.$$

が成り立つことをいう。

f が C^1 級のとき、 $g = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ とおくと (1) は部分積分 (Gauss の発散定理) で証明できる。

誤解が生じる恐れがないとき、 g のことを $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ と表す (記号の濫用)。

$f \in L^2(\Omega)$ のうちで、各 x_j について Sobolev の意味で微分可能で、 $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$ となっているもの全体を $H^1(\Omega)$ と表す。 $H^1(\Omega)$ を **Sobolev 空間** と呼ぶ。

2.1.3 広義導関数、超関数微分、Sobolev 空間

今回の話は、きちんとするにはかなり手間がかかる。中でも、微分の意味を拡張して議論する、というあたりが大きな問題となる。

定義 2.4 (広義導関数 (1 次元の場合))

Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合、 $f \in L^2(\Omega)$ とする。 $g \in L^2(\Omega)$ が f の x_j に関する **広義導関数** (超関数微分, ^{ソボレフ}Sobolev の意味での導関数) であるとは

$$(1) \quad (\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx.$$

が成り立つことをいう。

f が C^1 級のとき、 $g = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ とおくと (1) は部分積分 (Gauss の発散定理) で証明できる。

誤解が生じる恐れがないとき、 g のことを $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ と表す (記号の濫用)。

$f \in L^2(\Omega)$ のうちで、各 x_j について Sobolev の意味で微分可能で、 $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$ となっているもの全体を $H^1(\Omega)$ と表す。 $H^1(\Omega)$ を **Sobolev 空間** と呼ぶ。

実は後で出て来る X_{g_1} , X は、本当は次のように定義するのが正しい。

$$X_{g_1} = \left\{ w \in H^1(\Omega) \mid w = g_1 \text{ on } \Gamma_1 \right\}, \quad X = \left\{ w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ on } \Gamma_1 \right\}.$$

2.2 Poisson 方程式の境界値問題

Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界領域で、その境界 Γ は区分的に十分滑らかであるとする。また Γ_1, Γ_2 は条件

$$\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \quad \Gamma_1 \neq \emptyset$$

を満たすとする。 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1: \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g_2: \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられた時、Poisson 方程式の境界値問題

問題 (P)

次式を満たす u を求めよ:

$$\begin{aligned} (2) \quad & -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \\ (3) \quad & u = g_1 \quad \text{on } \Gamma_1, \\ (4) \quad & \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g_2 \quad \text{on } \Gamma_2, \end{aligned}$$

を考える。ここで $\mathbf{n}$ は Γ の外向き単位法線ベクトルを表す。

念のため (2) を Poisson 方程式, (3) を Dirichlet 境界条件, (4) を Neumann 境界条件と呼ぶ。

スライド 22 に図を置く。

2.3 弱定式化 — 弱解の方法

関数空間 X_{g_1} , X を次式で定める。

$$(5) \quad X_{g_1} := \{v \mid v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v|_{\Gamma_1} = g_1\},$$

$$(6) \quad X := \{v \mid v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v|_{\Gamma_1} = 0\}.$$

2.3 弱定式化 — 弱解の方法

関数空間 X_{g_1} , X を次式で定める。

$$(5) \quad X_{g_1} := \{v \mid v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v|_{\Gamma_1} = g_1\},$$

$$(6) \quad X := \{v \mid v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v|_{\Gamma_1} = 0\}.$$

関数の滑らかさに言及していない、いい加減な定義だが、今回は大らかに考えよう。

2.3 弱定式化 — 弱解の方法

関数空間 X_{g_1} , X を次式で定める。

$$(5) \quad X_{g_1} := \{v \mid v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v|_{\Gamma_1} = g_1\},$$

$$(6) \quad X := \{v \mid v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v|_{\Gamma_1} = 0\}.$$

関数の滑らかさに言及していない、いい加減な定義だが、今回は大らかに考えよう。

Poisson 方程式 (2) に、任意の $v \in X$ をかけて Ω で積分すると、

$$(7) \quad - \int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx.$$

2.3 弱定式化 — 弱解の方法

関数空間 X_{g_1} , X を次式で定める。

$$(5) \quad X_{g_1} := \{v \mid v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v|_{\Gamma_1} = g_1\},$$

$$(6) \quad X := \{v \mid v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v|_{\Gamma_1} = 0\}.$$

関数の滑らかさに言及していない、いい加減な定義だが、今回は大らかに考えよう。

Poisson 方程式 (2) に、任意の $v \in X$ をかけて Ω で積分すると、

$$(7) \quad - \int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx.$$

ここで Green の積分公式

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx \quad (d\sigma \text{ は面積要素})$$

を用いると、(7) は次のように変形できる。

$$(8) \quad \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) \, d\sigma = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx.$$

2.3 弱定式化 — 弱解の方法

境界条件 (4) から $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma_2} = g_2$, 関数空間 X の定義から $v|_{\Gamma_1} = 0$ であるから

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) d\sigma &= \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) d\sigma + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) d\sigma \\ &= \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n}(x) 0 d\sigma + \int_{\Gamma_2} g_2(x) v(x) d\sigma \\ &= \int_{\Gamma_2} g_2(x) v(x) d\sigma. \end{aligned}$$

ゆえに (8) は (よって (7) も) 次と同値である:

$$(9) \quad \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx + \int_{\Gamma_2} g_2(x) v(x) d\sigma.$$

(これが弱形式である。)

v のことを**試験関数** (test function) と呼ぶ。

ここまでの振り返り: 微分方程式に試験関数をかけて領域全体で積分し、Green の公式を使ってから、境界条件を代入して整理する。

2.3 弱定式化 — 弱解の方法

記述の簡略化のために記号をいくつか定義しよう。

$$\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx, \quad (u, v) := \int_{\Omega} u(x) v(x) dx, \quad [u, v] := \int_{\Gamma_2} u(x) v(x) d\sigma,$$

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}, \quad \|u\| := \sqrt{(u, u)}.$$

2.3 弱定式化 — 弱解の方法

記述の簡略化のために記号をいくつか定義しよう。

$$\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx, \quad (u, v) := \int_{\Omega} u(x) v(x) dx, \quad [u, v] := \int_{\Gamma_2} u(x) v(x) d\sigma,$$

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}, \quad \|u\| := \sqrt{(u, u)}.$$

これらを用いて、上で分かったことをまとめると、

定理 2.5 ((P) $\Rightarrow$ (W))

u が境界値問題 (P) の解ならば、 u は次の問題 (W) の解である。

問題 (W)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t.

$$(10) \quad \langle u, v \rangle = (f, v) + [g_2, v] \quad (v \in X).$$

2.3 弱定式化 — 弱解の方法

記述の簡略化のために記号をいくつか定義しよう。

$$\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx, \quad (u, v) := \int_{\Omega} u(x) v(x) dx, \quad [u, v] := \int_{\Gamma_2} u(x) v(x) d\sigma,$$

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}, \quad \|u\| := \sqrt{(u, u)}.$$

これらを用いて、上で分かったことをまとめると、

定理 2.5 ((P) $\Rightarrow$ (W))

u が境界値問題 (P) の解ならば、 u は次の問題 (W) の解である。

問題 (W)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t.

$$(10) \quad \langle u, v \rangle = (f, v) + [g_2, v] \quad (v \in X).$$

- (W) の解を (P) の**弱解** (weak solution)
- 問題 (P) に対して問題 (W) を設定することを**弱定式化** (weak formulation)
- (10) を**弱形式** (weak form)

と呼ぶ。

2.3 弱定式化 — 弱解の方法

ほぼ逆の命題、すなわち次の定理が成り立つ。

定理 2.6 $((W)_{+\alpha} \Rightarrow (P))$

u が (W) の解で、かつ十分滑らかであれば (P) の解になる

2.3 弱定式化 — 弱解の方法

ほぼ逆の命題、すなわち次の定理が成り立つ。

定理 2.6 $((W)_{+\alpha} \Rightarrow (P))$

u が (W) の解で、かつ十分滑らかであれば (P) の解になる

証明 まず $u \in X_{g_1}$ から $u = g_1$ (on Γ_1). すなわち (3) が成り立つ。

2.3 弱定式化 — 弱解の方法

ほぼ逆の命題、すなわち次の定理が成り立つ。

定理 2.6 $((W)_{+\alpha} \Rightarrow (P))$

u が (W) の解で、かつ十分滑らかであれば (P) の解になる

証明 まず $u \in X_{g_1}$ から $u = g_1$ (on Γ_1). すなわち (3) が成り立つ。

弱形式に対して、Green の公式を使うと

$$(\#) \quad - \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} \left(g_2 - \frac{\partial u}{\partial n} \right) v \, ds \quad (v \in X).$$

2.3 弱定式化 — 弱解の方法

ほぼ逆の命題、すなわち次の定理が成り立つ。

定理 2.6 $((W)_{+\alpha} \Rightarrow (P))$

u が (W) の解で、かつ十分滑らかであれば (P) の解になる

証明 まず $u \in X_{g_1}$ から $u = g_1$ (on Γ_1). すなわち (3) が成り立つ。

弱形式に対して、Green の公式を使うと

$$(\#) \quad - \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} \left(g_2 - \frac{\partial u}{\partial n} \right) v \, ds \quad (v \in X).$$

特に $v \in C_0^\infty(\Omega)$ の場合を考えると、 Γ_2 上の積分は 0 になるので

$$- \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad (v \in C_0^\infty(\Omega)).$$

2.3 弱定式化 — 弱解の方法

ほぼ逆の命題、すなわち次の定理が成り立つ。

定理 2.6 ((W)+ $\alpha \Rightarrow$ (P))

u が (W) の解で、かつ十分滑らかであれば (P) の解になる

証明 まず $u \in X_{g_1}$ から $u = g_1$ (on Γ_1). すなわち (3) が成り立つ。

弱形式に対して、Green の公式を使うと

$$(\#) \quad - \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} \left(g_2 - \frac{\partial u}{\partial n} \right) v \, ds \quad (v \in X).$$

特に $v \in C_0^\infty(\Omega)$ の場合を考えると、 Γ_2 上の積分は 0 になるので

$$- \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad (v \in C_0^\infty(\Omega)).$$

変分法の基本補題から

$$-\Delta u = f \quad (\text{in } \Omega).$$

すなわち (2) が成り立つ。

2.3 弱定式化 — 弱解の方法

$-\Delta u = f$ (in Ω) を (#) に代入すると

$$\int_{\Gamma_2} \left(g_2 - \frac{\partial u}{\partial n} \right) v \, ds = 0 \quad (v \in X).$$

また変分法の基本補題を用いて

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2).$$

すなわち (4) が成り立つ。



細かい注意 $-\Delta u = f$ が成り立つとき、 u が滑らかなほど、 f も滑らかになる。これは当たり前だが、 Ω が十分滑らかであれば (直観的には $\partial\Omega$ が滑らかな曲線ならば)、弱形式が成り立つとき、 f が滑らかなほど、 u も滑らかになることが証明できる。そういう場合は、定理の条件「なおかつ十分滑らかであれば」はチェックする必要がなくなる。

2.4 変分原理

任意の $u \in X_{g_1}$ に対して、

$$I[u] := \frac{1}{2} \|u\|^2 - (f, u) - [g_2, u]$$

とおく。次のような変分問題 (すなわち汎函数の最小問題) を考える。

問題 (V)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t. $I[u] = \min_{w \in X_{g_1}} I[w]$. (すなわち $I: X_{g_1} \rightarrow \mathbb{R}$ の最小点を求めよ。)

2.4 変分原理

任意の $u \in X_{g_1}$ に対して、

$$I[u] := \frac{1}{2} \|u\|^2 - (f, u) - [g_2, u]$$

とおく。次のような変分問題 (すなわち汎函数の最小問題) を考える。

問題 (V)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t. $I[u] = \min_{w \in X_{g_1}} I[w]$. (すなわち $I: X_{g_1} \rightarrow \mathbb{R}$ の最小点を求めよ。)

定理 2.7 ((W) $\Leftrightarrow$ (V))

u が (W) の解 $\Leftrightarrow u$ が (V) の解.

2.4 変分原理

任意の $u \in X_{g_1}$ に対して、

$$I[u] := \frac{1}{2} \|u\|^2 - (f, u) - [g_2, u]$$

とおく。次のような変分問題 (すなわち汎函数の最小問題) を考える。

問題 (V)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t. $I[u] = \min_{w \in X_{g_1}} I[w]$. (すなわち $I: X_{g_1} \rightarrow \mathbb{R}$ の最小点を求めよ。)

定理 2.7 ((W) $\Leftrightarrow$ (V))

u が (W) の解 $\Leftrightarrow u$ が (V) の解.

微分方程式の解が、変分問題の解になることがある。それが成り立つ時、**変分原理**が成り立つという。平凡社「世界大百科事典」によると、「一般的に、物理的な現象を法則として述べるのに関与するある基本スカラー量があって、これを最小にするという条件から法則が導かれる場合、この法則の記述の仕方を変分原理と呼んでいる。」

2.4 変分原理

後の準備として、一つ公式を導いておく。

補題 2.8

$u \in X_{g_1}$, $v \in X$ とするとき、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$I[u + tv] = \frac{t^2}{2} \|v\|^2 + t\{\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v]\} + I[u].$$

特に ($t = 1$ として)

$$I[u + v] - I[u] = \frac{1}{2} \|v\|^2 + \{\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v]\}.$$

証明は単純な計算である (二次関数の整理)。

2.4 変分原理 定理 2.7 の証明 (1)

定理 2.7 の証明

($\Leftarrow$) u を (V) の解とし、任意の $v \in X$ を取る。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、 Γ_1 上で

$$u + tv = g_1 + t \cdot 0 = g_1.$$

ゆえに $u + tv \in X_{g_1}$. それゆえ

$$f(t) := I[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

が定義されるが、仮定よりこれは $t = 0$ で最小値を取る。2 次関数

$$f(t) = I[u + tv] = \frac{t^2}{2} \|v\|^2 + t \{ \langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] \} + I[u]$$

が $t = 0$ で最小となるには、1 次の項の係数が 0 でなければならない:

$$\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] = 0.$$

これは弱形式に他ならない。ゆえに u は問題 (W) の解である。

2.4 変分原理 定理 2.7 の証明 (2)

($\Rightarrow$) u が (W) の解とする。任意の $w \in X_{g_1}$ に対して、 $v := w - u$ とおくと、 Γ_1 上で

$$v = w - u = g_1 - g_1 = 0.$$

ゆえに $v \in X$. さらに

$$I[w] - I[u] = I[u + v] - I[u] = \frac{1}{2} \|v\|^2 + \{\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v]\}.$$

u が弱形式を満たすという仮定から $\{\cdot\} = 0$ となることに注意すると、

$$I[w] - I[u] = \frac{1}{2} \|v\|^2 = \frac{1}{2} \|w - u\|^2 \geq 0.$$

ゆえに $I[u]$ は I の最小値である。すなわち u は問題 (V) の解である。 $\square$

2.4 変分原理 定理 2.7 の証明 (2)

余談 2.9

要は 2 次関数 $I[u]$ の最小化である。 I の定義域は無限次元の空間であるが、そのような汎関数に対しても、(普通の微分を拡張した) Fréchet 微分というものが定義される。実は、 I の Fréchet 微分は

$$I'[u] = \langle u, \cdot \rangle - (f, \cdot) - [g_2, \cdot].$$

(Cf. $i(u) = \frac{1}{2}u^2 - fu - g_2u$ のとき、 $i'(u) = u - f - g_2$)

そして、 $I'[u] = 0$ は

$$\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] = 0 \quad (v \in X)$$

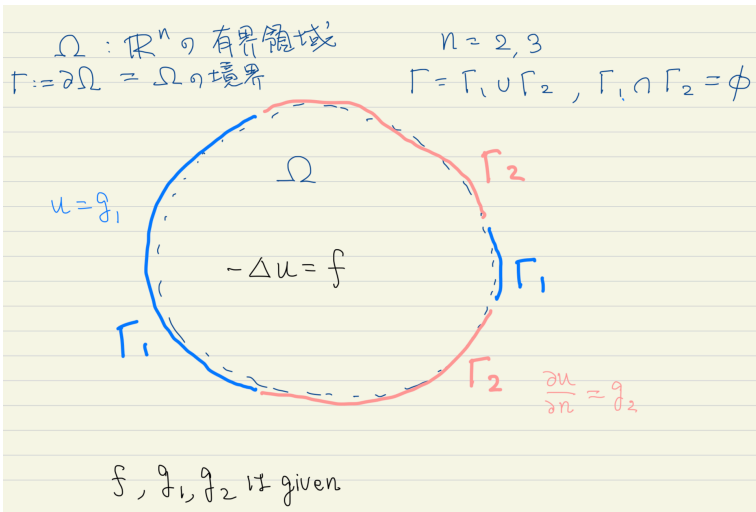
となる。つまり、

弱形式は、変分問題の汎関数の微分係数 = 0 という条件

である。



(準備中)



付録 補題 2.8 の証明

(1) $u \in X_{g_1}$, $v \in X$, $t \in \mathbb{R}$ とするとき、 Γ_1 上で

$$u + tv = g_1 + t \cdot 0 = g_1$$

であるから $u + tv \in X_{g_1}$.

$$\begin{aligned} I[u + tv] &= \frac{1}{2} \|u + tv\|^2 - (f, u + tv) - [g_2, u + tv] \\ &= \frac{1}{2} \langle u + tv, u + tv \rangle - (f, u) - t(f, v) - [g_2, u] - t[g_2, v] \\ &= \frac{1}{2} (\|u\|^2 + 2t\langle u, v \rangle + \|tv\|^2) - t(f, v) - [g_2, u] - t[g_2, v] \\ &= \frac{1}{2} \|u\|^2 - (f, u) - [g_2, u] + t \{ \langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] \} + \frac{t^2}{2} \|v\|^2 \\ &= I[u] + t \{ \langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] \} + \frac{t^2}{2} \|v\|^2. \end{aligned}$$

付録 補題 2.8 の証明

(2) $u, w \in X_{g_1}$ とするとき、 $v := w - u$ とおくと、 $w = u + 1 \cdot v$. また Γ_1 上で

$$v = w - u = g_1 - g_1 = 0.$$

ゆえに $v \in X$. (1) を用いて

$$\begin{aligned} I[w] - I[u] &= I[u + 1 \cdot v] - I[u] = \frac{1}{2} \|v\|^2 + 1 \cdot \{\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v]\} \\ &= \frac{1}{2} \|v\|^2 + \{\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v]\}. \end{aligned}$$



参考文献

- [1] 菊地文雄：有限要素法概説, サイエンス社 (1980), 新訂版 1999.
- [2] Brezis, H.: 関数解析, 産業図書 (1988), (藤田 宏, 小西 芳雄 訳), 原著は版を改めて、より内容豊富になっています。
- [3] Brezis, H.: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer (2011).