

# 有限要素法への入門

桂田 祐史

katurada@meiji.ac.jp

1996年1月19日, 2019年3月10日

この文書は、菊地文雄先生の「有限要素法概説」(サイエンス社, 初版 1980, 新訂版 1999 [1]) という書籍の前半部分の内容を数学科向けに書き直し、適当な加筆をして、付録に C によるサンプル・プログラムをつけたものです<sup>1</sup>。

## 目次

<b>1 序</b>	<b>2</b>
1.1 有限要素法の周辺	2
1.2 変分法についての講釈	3
<b>2 Poisson 方程式に対する変分法</b>	<b>5</b>
2.1 Poisson 方程式の境界値問題	5
2.2 弱定式化 — 弱解の方法	5
2.3 変分原理	7
<b>3 Ritz-Galerkin 法</b>	<b>8</b>
3.1 Galerkin 法	8
3.2 Ritz 法	11
3.3 誤差最小の原理	11
3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法	12
3.5 新しい Ritz-Galerkin 法としての有限要素法	14
<b>4 1 次元の有限要素法</b>	<b>15</b>
4.1 モデル問題とその弱定式化	16
4.2 有限要素への分割	16
4.3 要素係数行列の計算	18
4.4 近似方程式の組み立て — 直接剛性法	20
4.5 具体的にすることのまとめ	23

---

<sup>1</sup>そういうわけで、この文書は内輪向けです。基本的に桂田研究室と大学院で講義を受講している人だけに見せるつもりです。桂田は菊地先生の本をたくさんストックしてありますから、必要ならばいつでも貸し出せます。この文書は、初版の頃、つまり新訂版が出る前から書き出したけれど、ゴールは見えない。

4.6	連立 1 次方程式の具体形	24
4.7	サンプル・プログラム	26
4.7.1	解説	31
4.7.2	実験	32
4.7.3	やってみよう	33
<b>5</b>	<b>2 次元の有限要素法</b>	<b>33</b>
5.1	有限要素への分割と基底関数	33
5.2	三角形 $e$ 上の 1 次関数 $L_i$ と $(L_j, L_i)_e, \langle L_j, L_i \rangle_e$	34
5.2.1	三角形要素 $e$ の面積 $ e $	34
5.2.2	三角形要素の面積座標 $L_i$	34
5.2.3	面積座標の積の積分	35
5.2.4	面積座標 $L_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y$ の係数決定	36
5.3	要素係数行列の計算	38
5.4	近似方程式の組み立て — 直接剛性法	39
5.5	近似方程式の具体例	41
5.6	方程式を立てるのに必要なもの	44
5.7	サンプルプログラム	45
<b>A</b>	<b>変分法メモ</b>	<b>46</b>
A.1	Johann Bernoulli (1667–1748) の最短降下線の問題	46
A.2	Euler-Lagrange 方程式	48
A.3	最小作用の原理	50
A.4	Dirichlet 原理	51
A.4.1	汎関数 $I$ を最小にする関数は、Laplace 方程式を満すことの確認	51
A.5	変分法の基本補題	52
A.6	変分法の “直接法”	52
A.7	おまけ: 極小曲面	53
<b>B</b>	<b>Lax-Milgram の定理</b>	<b>53</b>
<b>C</b>	<b>参考になる情報</b>	<b>54</b>

# 1 序

## 1.1 有限要素法の周辺

**有限要素法** (finite element method, FEM) は後で詳しく説明するように、連続区分的多項式を用いた Ritz-Galerkin 法を基礎とする、偏微分方程式の数値解法である。

Ritz 法は、**変分法** (calculus of variation) による微分方程式の解法を有限次元近似したものである。Galerkin 法は、微分方程式の弱解 (微分方程式から導かれる弱形式の解) を求める手続きを有限次元近似したものである。この二つの方法は、考え方は異なるが、結果として得

られる近似解を求める方程式は (従って近似解も) 同一のものとなる。そのため Ritz-Galerkin 法と呼ばれる。

(準備中：差分法と比較しての有限要素法の優劣 (というか特徴)。境界適合法、格子自動生成にも触れたい。)

## 1.2 変分法についての講釈

(変分法については、付録 A も用意してある。そちらの一部を講義することもある。)

変分法とは、狭義には、汎函数 (functional) の最大最小問題 (変分問題) を解くための方法 — 無限次元空間の微分法 — である<sup>2</sup>。

**例 1.1 (最短降下線 (Brachistochrone))** 一様な重力場内の二定点  $P, Q$  ( $P$  は  $Q$  よりも高いところにある) が与えられた時、 $P$  から  $Q$  に至る曲線に拘束されて、重力に従って移動する運動を考える。 $P$  が原点になるように座標を取り、 $Q = (a_1, b_1)$  とし、経路 (曲線) を  $u = u(x)$  とすると、所要時間は、(重力加速度を  $g$  として)

$$I[u] := \int_0^{a_1} \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{\sqrt{-2gu(x)}} dx$$

のような経路  $u$  の関数であるが、それを最小とするのは、どのような経路か? — 関数の関数の最小値問題である。■

**例 1.2 (極小曲面 (minimal surface))** 空間内に与えられた閉曲線  $\Gamma$  に石鹸膜を張った時、膜の形はどうなるか?

答: 表面張力が存在するから、面積を最小にするような曲面になる。

そこで数学的には、面積を最小にする曲面はどんなものか (存在するのか? どうやって求められるか?) が問題になる。曲面が  $z = u(x, y)$  ( $(x, y) \in \Omega$ ) と関数のグラフで表されたとすると、その曲面積

$$I[u] := \iint_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy$$

を条件

$$(x, y, u(x, y)) \in \Gamma \quad ((x, y) \in \partial\Omega)$$

の下に最小にする  $u$  を求めよ、という問題になる。■

このような汎函数  $I[u]$  の最小値を与える  $u$  は、Euler-Lagrange 方程式と呼ばれる微分方程式の解となっている。(Euler-Lagrange 方程式の導出は教育的である。それは、部分積分を用いて、微分方程式を導出するという、(後述する) 弱形式の導出の逆 (のようなこと) をしているから。ともすると、「最初に微分方程式ありき、それを解く方便としての弱定式化 (弱解の方法)」と取られかねないが、実は微分方程式の前に弱定式化 (と言っても、ここでは弱形式

<sup>2</sup>関数解析 (functional analysis) のルーツの一つである。変分法については、例えば加藤 [2] を参照せよ。

ではなくて、変分問題であるが) がある問題も多いのである。) 例1の場合、Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{2\sqrt{2g}\sqrt{-u(x)}^3} - \frac{d}{dx} \left( \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}\sqrt{-2gu(x)}} \right) = 0$$

で、これは解けて、

$$x = \frac{C}{2} (\theta + \sin \theta), \quad u = \frac{C}{2} (\cos \theta - 1)$$

を得る。一方、例2の Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \right) = 0,$$

すなわち

$$(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0$$

のようになるが、これは非線形偏微分方程式で、簡単には解けない。Euler-Lagrange 方程式を導くのは簡単だが、それを解くのは難しいことも多い。

ところで、この変分問題と Euler-Lagrange 方程式の間の対応関係を逆向きに使って役立てられることもある。

**例 1.3 (Dirichlet の原理)** Riemann は、彼の名を冠せられている写像定理<sup>3</sup>の証明のため、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$(D.P.) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & (\text{in } \Omega) \\ u = f & (\text{on } \partial\Omega) \end{cases}$$

の解の存在を示す必要があった。ここで  $\Omega$  は平面上の滑らかな境界を持つ単連結領域なのだが、それがよほど簡単なものでないと、この (D.P.) を具体的に解くことは出来ない。彼は、 $\partial\Omega$  上指定された値  $f$  を取る関数のうちで、Dirichlet 積分

$$I[u] := \iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

を最小にする  $u$  (変分問題の解!) が、(D.P.) の解である、という **Dirichlet の原理**を注意し、この変分問題の解が存在するのは明らかだから、(D.P.) の解の存在が示される、とした。この「解法」はイメージが鮮明で非常に魅力的だが、残念ながら解の存在は明らかとしたのは Riemann の早とちりで、実際には全然明らかではなく、この論法を正当化するためには、その後の多くの数学者の努力が必要であった。(汎関数  $I$  は下に有界であるし、 $u$  の『連続関数』であるから、定義域が有限次元の空間であれば、**A** 「有界閉集合はコンパクト」、**B** 「コンパクト集合上の連続関数は最大値・最小値を持つ」という必殺技二発でケリがつくところだが、ここで考えている関数空間のような無限次元空間では **A** が成立しないので、最小点の存在は自明ではない。) ■

<sup>3</sup>Riemann の写像定理

## 2 Poisson 方程式に対する変分法

### 2.1 Poisson 方程式の境界値問題

$\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  の有界領域で、その境界  $\Gamma$  は区分的に十分滑らかであるとする。また  $\Gamma_1, \Gamma_2$  は条件

$$\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \quad \Gamma_1 \neq \emptyset$$

を満たすとする。 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, g_1: \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}, g_2: \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられた時、Poisson 方程式の境界値問題

問題 (P)

次式を満たす  $u$  を求めよ:

$$\begin{aligned} (1) \quad & -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \\ (2) \quad & u = g_1 \quad \text{on } \Gamma_1, \\ (3) \quad & \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g_2 \quad \text{on } \Gamma_2, \end{aligned}$$

を考える。ここで  $\mathbf{n}$  は  $\Gamma$  の外向き単位法線ベクトルを表す。

### 2.2 弱定式化 — 弱解の方法

今、

$$\begin{aligned} X_{g_1} &:= \{v; v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad v|_{\Gamma_1} = g_1\}, \\ X &:= \{v; v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad v|_{\Gamma_1} = 0\} \end{aligned}$$

とおく。これは関数の滑らかさについて言及していない、いい加減な定義だが、大らかに考えよう<sup>4</sup>。(1) に  $v \in X$  をかけて  $\Omega$  で積分すると、

$$(4) \quad -\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx.$$

ここで Green の積分公式<sup>5</sup>

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x) dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)v(x) d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \quad (d\sigma \text{ は面積要素})$$

を用いると、(4) は

$$(5) \quad \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)v(x) d\sigma = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx$$

<sup>4</sup>大抵の場合、 $v \in H^1(\Omega)$  という条件を書き加えれば良い ( $H^1(\Omega)$  は Sobolev の意味で一回微分可能で、元の関数と各導関数が  $\Omega$  で二乗可積分なもの全体に内積  $(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$  を与えて出来る Hilbert 空間)。また  $v|_{\Gamma_1}$  はトレースの意味で考えることになる。例えば Brezis [3] を見よ。

<sup>5</sup>ここで  $\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j}$ .

となる。ところで  $v|_{\Gamma_1} = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = g_2$  であるから

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x) d\sigma &= \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x) d\sigma + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x) d\sigma \\ &= \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n}(x)0 d\sigma + \int_{\Gamma_2} g_2(x)v(x) d\sigma \\ &= \int_{\Gamma_2} g_2(x)v(x) d\sigma. \end{aligned}$$

ゆえに (5) は次のようになる:

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx + \int_{\Gamma_2} g_2(x)v(x) d\sigma.$$

記述の簡略化のために記号をいくつか定義しよう。

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &:= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx, & (u, v) &:= \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, & [u, v] &:= \int_{\Gamma_2} u(x)v(x) d\sigma, \\ \|u\| &:= \sqrt{\langle u, u \rangle}, & \|u\| &:= \sqrt{(u, u)}. \end{aligned}$$

これらを用いて、上で分かったことをまとめると、

$u$  が境界値問題 (P) の解ならば、 $u$  は次の問題 (W) の解である。

問題 (W)

Find  $u \in X_{g_1}$  s.t.

$$(6) \quad \langle u, v \rangle = (f, v) + [g_2, v] \quad (v \in X).$$

我々は

- (W) の解を (P) の **弱解** (weak solution)
- 問題 (P) に対して問題 (W) を設定することを **弱定式化** (weak formulation)
- (6) を **弱形式** (weak form)

と呼ぶ。

逆をやっておく。

$u$  が (W) の解で、なおかつ十分滑らかであれば (P) の解になる

ことを示そう。

まず  $u \in X_{g_1}$  から  $u = g_1$  (on  $\Gamma_1$ ) は明らかである。弱形式に対して、Green の公式を使うと、

$$(\#) \quad - \int_{\Omega} \Delta uv dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} \left( g_2 - \frac{\partial u}{\partial n} \right) v ds = 0 \quad (v \in X).$$

特に  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  の場合を考えると、 $\partial\Gamma_2$  上の積分は 0 になるので、

$$-\int_{\Omega} \Delta uv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx \quad (v \in C_0^\infty(\Omega)).$$

変分法の基本補題から

$$-\Delta u = f \quad (\text{in } \Omega).$$

これを (#) に代入すると

$$\int_{\Gamma_2} \left( g_2 - \frac{\partial u}{\partial n} \right) v \, ds = 0 \quad (v \in X).$$

これから

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2).$$

## 2.3 変分原理

微分方程式の解が、変分問題の解になることがある。それが成り立つ時、**変分原理**が成り立つという<sup>6</sup>。任意の  $u \in X_{g_1}$  に対して、

$$I[u] := \frac{1}{2} \|u\|^2 - (f, u) - [g_2, u]$$

とおく。後の準備として、一つ公式を導いておく。

**補題 2.1**  $u \in X_{g_1}, v \in X$  とする。 $t \in \mathbb{R}$  に対して、

$$I[u + tv] = \frac{t^2}{2} \|v\|^2 + t \{ \langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] \} + I[u].$$

特に ( $t = 1$  として)

$$I[u + v] - I[u] = \frac{1}{2} \|v\|^2 + \{ \langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] \}.$$

次のような変分問題 (すなわち汎関数の最小問題) を考える。

**問題 (V)**

Find  $u \in X_{g_1}$  s.t.  $I[u] = \min_{w \in X_{g_1}} I[w]$ . (すなわち  $I: X_{g_1} \rightarrow \mathbb{R}$  の最小点を求めよ。)

**定理 2.2**  $u$  が (W) の解  $\iff u$  が (V) の解.

<sup>6</sup>この「原理」という言葉は、原因とか法則という意味ではない。このような使い方をされるものである。

**証明** ( $\Leftarrow$ )  $u$  を  $(V)$  の解とし、 $\forall v \in X$  を取る。 $\forall t \in \mathbb{R}$  に対して  $u + tv \in X_{g_1}$ . それゆえ

$$f(t) := I[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

を考えることが出来るが、仮定よりこれは  $t = 0$  で最小値を取る。2 次関数

$$f(t) = I[u + tv] = \frac{t^2}{2} \|v\|^2 + t \{ \langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] \} + I[u]$$

が  $t = 0$  で最小となるには、1 次項の係数が 0 でなければならない:

$$\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] = 0.$$

これは弱形式に他ならない。ゆえに  $u$  は問題  $(W)$  の解である。

( $\Rightarrow$ )  $u$  が  $(W)$  の解とする。 $\forall w \in X_{g_1}$  に対して  $v := w - u$  とおくと、 $v \in X$  で、

$$I[w] - I[u] = I[u + v] - I[u] = \frac{1}{2} \|v\|^2 + \{ \langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] \}.$$

$u$  が弱形式を満たすという仮定から  $\{ \cdot \} = 0$  となることに注意すると、

$$I[w] - I[u] = \frac{1}{2} \|v\|^2 = \frac{1}{2} \|w - u\|^2 \geq 0.$$

ゆえに  $I[u]$  は  $I$  の最小値である。すなわち  $u$  は問題  $(V)$  の解である。■

**注意 2.3** 要は 2 次関数  $I[u]$  の最小化である。 $I$  の Fréchet 微分は

$$I'[u] = \langle u, \cdot \rangle - (f, \cdot) - [g_2, \cdot]$$

であるから、 $I'[u] = 0$  は

$$\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] = 0 \quad (v \in X)$$

と書ける。つまり、

**弱形式は、変分問題の汎関数の微分係数 = 0 という条件である**

というわけである。■

## 3 Ritz-Galerkin 法

### 3.1 Galerkin 法

弱解の有限次元近似版として微分方程式の近似解を求めよう、というのが Galerkin 法である。



いくつかの既知関数を選び、その 1 次結合で  $u$  や  $v$  の近似関数を作る。より具体的には関数空間  $X$ ,  $X_{g_1}$  の有限近似を作るため、

$$\begin{aligned}\hat{g}_1 &:= g_1 \quad \text{on } \Gamma_1 \\ \psi_i &= 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (i = 1, 2, \dots, m)\end{aligned}$$

となる  $\hat{g}_1$  と、1 次独立な  $\psi_i \in X$  ( $i = 1, \dots, m$ ) を適当に選び、

$$\begin{aligned}\hat{X}_{g_1} &:= \left\{ \hat{g}_1 + \sum_{i=1}^m a_i \psi_i; (a_i) \in \mathbb{R}^m \right\}, \\ \hat{X} &:= \left\{ \sum_{i=1}^m a_i \psi_i; (a_i) \in \mathbb{R}^m \right\}\end{aligned}$$

とおく<sup>7</sup>。以下  $\{\psi_j\}$  のことを基底関数と呼ぶ。

Poisson 方程式の境界値問題 (P) の解  $u$  を  $\hat{X}_{g_1}$  の要素  $\hat{u}$  で近似することを考える。弱形式 (W) を思い浮かべて、

**問題 ( $\widehat{W}$ )**

$$\text{Find } \hat{u} \in \hat{X}_{g_1} \text{ s.t. } \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

という問題を考える。ちなみに、この業界の言葉遣いでは、 $\hat{u}$  を**試行関数 (trial function)**、 $\hat{v}$  を**試験関数 (test function)**と呼ぶ。

**注意 3.1 (重み付き残差法)** ここでは試験関数の空間として、試行関数の空間とよく似た (ともに  $\psi_i$  で張られている) ものを採用したが、これは絶対必要というわけではない。実際に色々な採り方がある (もっとも、その場合は、Galerkin 法ではなく、**重み付き残差法** (method of weighted residuals, weighted residual methods) と呼ばれることが多い)。この意味で Galerkin 法は、後で説明する Ritz 法よりも広い方法である、とすることが出来る。■

方程式が  $\hat{v}$  につき線形で、 $\hat{X}$  が  $\{\psi\}_{i=1,2,\dots,m}$  で張られることから、( $\widehat{W}$ ) は次の問題と同値であることが分かる。

**問題 ( $\widehat{W}'$ )**

$$\text{Find } \hat{u} \in \hat{X}_{g_1} \text{ s.t. } \langle \hat{u}, \psi_i \rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

ここで

$$\hat{u} = \hat{g}_1 + \sum_{j=1}^m a_j \psi_j$$

として、条件式に代入すると

$$\left\langle \hat{g}_1 + \sum_{j=1}^m a_j \psi_j, \psi_i \right\rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

<sup>7</sup>菊地先生のテキストでは  $\hat{g}_1$  は  $\psi_0$  という記号になっていた。

すなわち

$$(7) \quad \langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle + \sum_{j=1}^m a_j \langle \psi_j, \psi_i \rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

これを行列とベクトルで表示すると

$$\begin{pmatrix} \langle \psi_1, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \psi_1, \psi_m \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_m \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \psi_1) + [g_2, \psi_1] - \langle \hat{g}_1, \psi_1 \rangle \\ \vdots \\ (f, \psi_m) + [g_2, \psi_m] - \langle \hat{g}_1, \psi_m \rangle \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$A\mathbf{a} = \mathbf{f},$$

ただし、

$$A := \begin{pmatrix} \langle \psi_1, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \psi_1, \psi_m \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_m \rangle \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f} := \begin{pmatrix} (f, \psi_1) + [g_2, \psi_1] - \langle \hat{g}_1, \psi_1 \rangle \\ \vdots \\ (f, \psi_m) + [g_2, \psi_m] - \langle \hat{g}_1, \psi_m \rangle \end{pmatrix}.$$

すなわち、連立 1 次方程式に帰着される。この方程式が解を持つかどうかは問題になるが、次の命題により解決する。

**補題 3.2 (Galerkin 法の一意可解性)**  $\Gamma_1 \neq \emptyset$  で、 $\{\psi_j\}$  は 1 次独立とする。このとき  $A$  は正値対称である。ゆえに連立 1 次方程式は一意可解である。

( $\{\psi_j\}$  を 1 次独立に取るのは、基底とするのだから当然である。一方、 $\Gamma_1 \neq \emptyset$  は、もとの問題の解の一意性のために必要であるから、これも自然な条件である。)

**証明**  $A$  の対称性は明らかである。 $A$  の正値性 (正定符号性) を示す。

$$\forall \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$$

に対して

$$\hat{v} := \sum_{j=1}^m b_j \psi_j$$

とおくと、 $\psi_j$  の 1 次独立性から  $\hat{v} \neq 0$  であり、実は  $\|\hat{v}\| > 0$  である<sup>8</sup>。ゆえに

$$0 < \|\hat{v}\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^m b_j \psi_j, \sum_{i=1}^m b_i \psi_i \right\rangle = \sum_{i=1}^m b_i \left( \sum_{j=1}^m \langle \psi_j, \psi_i \rangle b_j \right) = \mathbf{b}^T A \mathbf{b}$$

<sup>8</sup>もしも  $\|\hat{v}\| = 0$  ならば、 $\|\cdot\|$  の定義から、 $\hat{v}$  は定数関数であるが、 $\Gamma_1 \neq \emptyset$  から、 $\hat{v}$  は少なくとも 1 点 ( $\Gamma_1$  の任意の点) で 0 に等しく、 $\hat{v} \equiv 0$  が導かれ、矛盾が生じる。

となる<sup>9</sup>。従って  $A$  は正値である。 ■

### 3.2 Ritz 法

変分問題の有限次元近似版の解を求め、それを元の問題の近似解として採用しよう、というのが **Ritz 法** である。具体的には次の問題を考える。

**問題 ( $\widehat{V}$ )**

$$\text{Find } \hat{u} \in \hat{X}_{g_1} \text{ s.t. } I[\hat{u}] = \min_{\hat{w} \in \hat{X}_{g_1}} I[\hat{w}].$$

(W) と (V) の同値性と同様に、 $(\widehat{W})$  と  $(\widehat{V})$  も同値である。つまり、今考えている Poisson 方程式の境界値問題 (のような対称性のある) 問題では、Galerkin 法と Ritz 法、それぞれによる近似解を定める方程式は同じものである。そこで、**Ritz-Galerkin 法** と呼ばれる。

ちなみに

$$I[\hat{u}] = \frac{1}{2} \|\psi_0\|^2 + \sum_{i=1}^m a_i \langle \psi_0, \psi_i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_i a_j \langle \psi_i, \psi_j \rangle - (f, \psi_0) - \sum_{i=1}^m a_i (f, \psi_i) - [g_2, \psi_0] - \sum_{i=1}^m a_i [g_2, \psi_i]$$

となる。これから極値の条件は

$$\frac{\partial I[\hat{u}]}{\partial a_k} = \langle \psi_0, \psi_k \rangle + \sum_{j=1}^m a_j \langle \psi_j, \psi_k \rangle - (f, \psi_k) - [g_2, \psi_k] = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

と得られる<sup>10</sup> (もちろん Galerkin 法で得た (7) と同じである)。

### 3.3 誤差最小の原理

**定理 3.3 (誤差最小の原理)** Ritz-Galerkin 解  $\hat{u}$  は  $\hat{X}_{g_1}$  の中で (ある意味で) 最も  $u$  に近い。すなわち

$$\|\hat{u} - u\| = \min_{\hat{w} \in \hat{X}_{g_1}} \|\hat{w} - u\|.$$

(授業では、証明の前に、 $u$  から超平面  $\hat{X}_{g_1}$  への射影  $\hat{u}$  の図を板書する。)

<sup>9</sup>ここで  $\mathbf{b}^T$  は、縦ベクトル  $\mathbf{b}$  を転置して出来る横ベクトルである。ゆえに  $\mathbf{b}^T \mathbf{a}$  はベクトル  $\mathbf{b}$  と  $\mathbf{a}$  の内積に他ならない。この文書では、色々な内積が登場するので、それらを明確に区別するために、記号を使い分けている。

<sup>10</sup>  $\frac{\partial}{\partial a_k} a_i = \delta_{ik}$  に注意。一般に  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{b} = (b_i) \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ) とするとき、 $\nabla f(x) = \frac{1}{2}(A + A^T)x + \mathbf{b}$  となる。

**証明** まず  $\hat{u}$  は、 $u$  から  $\hat{X}_{g_1}$  に下ろした垂線の足 (正射影) であることを示そう。

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle &= (f, v) + [g_2, v] \quad (v \in X), \\ \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle &= (f, \hat{v}) + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X})\end{aligned}$$

から ( $\hat{X} \subset X$  に注意して)

$$\langle \hat{u} - u, \hat{v} \rangle = 0 \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

任意の  $\hat{w} \in \hat{X}_{g_1}$  に対して、 $\hat{u} - \hat{w} \in \hat{X}$  ゆえ、 $\hat{v}$  のところに  $\hat{u} - \hat{w}$  を代入して

$$(\hat{u} \text{ は垂線の足}) \quad \langle \hat{u} - u, \hat{u} - \hat{w} \rangle = 0.$$

ピタゴラスの定理から、

$$\|\hat{u} - u\| \leq \|\hat{w} - u\|$$

を得る。■

### 3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

実際に解くべき問題が与えられた時、基底関数  $\{\psi_i\}$  を適当に選択しなければならないが、古典的な Ritz-Galerkin 法では、微分作用素の主要部の固有関数などを使用する。

**例 3.4 (区間における Ritz-Galerkin 法)** 常微分方程式の境界値問題

$$\begin{cases} -u'' = f & (0 < x < 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

を考える。ここで  $f$  は  $(0, 1)$  上定義された既知関数である。 $(\Gamma_1 = \Gamma = \{0, 1\}, \Gamma_2 = \emptyset, g_1 = 0)$  である。)  $u(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$  であるが、それはさておき...

$$\psi_j(x) := \sin(j\pi x) \quad (1 \leq j \leq m)$$

とおくと

$$\psi_j(0) = \psi_j(1) = 0 \quad (1 \leq j \leq m)$$

であるから、

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^m a_j \psi_j(x)$$

は  $\Gamma_1$  上での基本境界条件を満たす ( $g_1 = 0$  であるから  $\hat{g}_1 = 0$  としている)。 $\Gamma_2 = \emptyset$  であるから、 $[g_2, \cdot]$  という項は不要で、弱形式は

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) \quad (\hat{v} \in \hat{X} := \text{Span}\{\psi_1, \dots, \psi_m\}).$$

となる ( $\text{Span}\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$  は  $\psi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) の張る線型空間を表す)。さて

$$\langle \psi_j, \psi_i \rangle = ij\pi^2 \int_0^1 \cos(j\pi x) \cos(i\pi x) dx = \frac{1}{2} ij\pi^2 \delta_{ij}.$$

ゆえに

$$A = \frac{\pi^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 4 & & \\ & & 9 & \\ & & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & & m^2 \end{pmatrix}.$$

この逆行列は一目で

$$A^{-1} = \frac{2}{\pi^2} \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 1/4 & & \\ & & 1/9 & \\ & & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & & 1/m^2 \end{pmatrix},$$

と求まるから、

$$\mathbf{a} = A^{-1}\mathbf{f} = \frac{2}{\pi^2} \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 1/4 & & \\ & & 1/9 & \\ & & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & & 1/m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx \\ \int_0^1 f(x) \sin(2\pi x) dx \\ \int_0^1 f(x) \sin(3\pi x) dx \\ \vdots \\ \int_0^1 f(x) \sin(m\pi x) dx \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$a_i = \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{i^2} \int_0^1 f(x) \sin(i\pi x) dx \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

( $\psi_j$  は同次 Dirichlet 条件付きの  $-(d/dx)^2$  の固有関数である。このため、係数行列  $A$  が対角行列となって、計算が簡単になっている。) ■

**例 3.5 (正方形領域における Ritz–Galerkin 法)** 正方形領域  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  において、Poisson 方程式  $-\Delta u = f$  に同次 Dirichlet 境界条件を課した境界値問題を考える ( $\Gamma_1 = \Gamma$ ,  $g_1 = 0$  である)。このとき  $\{\psi_k\}$  として

$$\varphi_{ij}(x, y) = \sin(i\pi x) \sin(j\pi y) \quad (1 \leq i, j \leq m)$$

を採用するのが便利である (ここで  $m \in \mathbb{N}$ )。弱形式は上の例と同様に

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) \quad (\hat{v} \in \hat{X} := \text{Span}\{\varphi_{ij}\}).$$

である。後のための準備として

$$\langle \varphi_{kl}, \varphi_{ij} \rangle = \frac{\pi^2}{4} (ki + \ell j) \delta_{ki} \delta_{\ell j} \quad (1 \leq i, j, k, \ell \leq m)$$

さて

$$\hat{u} = \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m a_{k\ell} \varphi_{k\ell}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \langle \hat{u}, \varphi_{ij} \rangle &= (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \leq i, j \leq m) \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m a_{k\ell} \langle \varphi_{k\ell}, \varphi_{ij} \rangle &= (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \leq i, j \leq m) \\ \Leftrightarrow a_{ij} \langle \varphi_{ij}, \varphi_{ij} \rangle &= (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \leq i, j \leq m) \\ \Leftrightarrow a_{ij} &= \frac{4}{\pi^2(i^2 + j^2)} (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \leq i, j \leq m) \end{aligned}$$

例えば  $f \equiv 1$  (定数関数) である場合、

$$\begin{aligned} (f, \varphi_{ij}) &= \int_0^1 \int_0^1 \sin(i\pi x) \sin(j\pi y) dx dy = \frac{[(-1)^{i+1} + 1][(-1)^{j+1} + 1]}{ij\pi^2} \\ &= \begin{cases} \frac{4}{ij} & (i, j \text{ が共に奇数}) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases} \end{aligned}$$

ゆえに

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{16}{ij(i^2 + j^2)\pi^4} & (i, j = 1, 3, 5, 7, \dots). \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

$(x, y) = (1/2, 1/2)$  の時に値を計算してみよう。中略■

ここで古典的 Ritz-Galerkin 法の特徴を列挙しておこう。

- (1) 基底関数として固有関数を使うため、適用範囲が狭い。
- (2) Neumann 境界条件の処理が楽。

### 3.5 新しい Ritz-Galerkin 法としての有限要素法

有限要素法は、次のような特徴を持つ Ritz-Galerkin 法である。

- 領域を

- 1 次元の場合 区間
- 2 次元の場合 三角形, 四角形
- 3 次元の場合 三角錐, 四面体

などの簡単な図形 — **有限要素 (finite element)** と呼ぶ — に分割する:

$$\bar{\Omega} \equiv \hat{\Omega} := \bigcup_{k=1}^m e_k \quad (e_k \text{ は有限要素}).$$

- 連続な区分的多項式 ( $\hat{\Omega}$  で連続、各有限要素上で多項式に等しいもの) を基底関数に採用する。

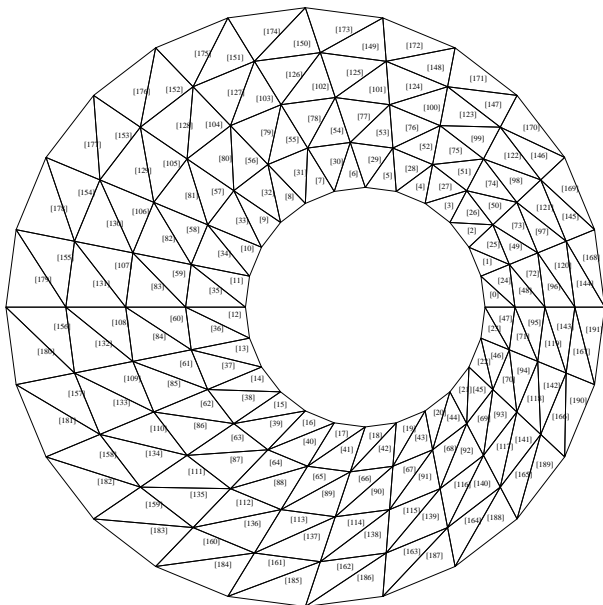


図 1: 領域を三角形の合併で近似する

ただし、次の図2のように、重なりや、すき間、頂点が他の三角形の辺上にあることは避けることにする。各三角形を (有限) 要素とよぶ。

(有限要素というときは、試行関数、試験関数として、どういう近似関数を用いるかまで考える場合がある。その辺の区別について言及すべきかも。)

## 4 1 次元の有限要素法

有限要素法が実際に利用されるのは、空間2次元, 3次元の問題がほとんどであるが、ここでは概要を理解するために、1次元の Poisson 方程式の境界値問題に対する有限要素法の説明を行う。1次元問題を解くためとしては不必要に大掛かりな面もあるが、このすぐ後に説明する2次元の場合に少しでも分かりやすくするためであるので、その点は我慢してもらいたい。

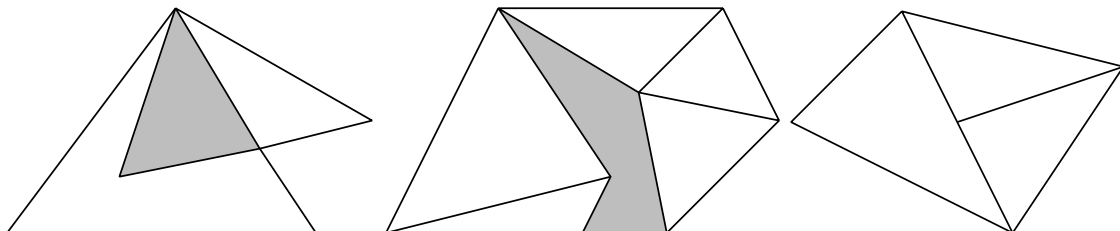


図 2: 重なり, すき間, 頂点が他の要素の辺上にある、なんてのはダメ

## 4.1 モデル問題とその弱定式化

モデル問題として、(1)–(3) の問題 (P) の 1 次元版である、常微分方程式の境界値問題

$$\begin{cases} -u'' = f & (\text{in } (0, 1)) \\ u(0) = \alpha, \quad \frac{du}{dx}(1) = \beta \end{cases}$$

を考える。ここで  $f$  は  $(0, 1)$  上定義された既知関数、 $\alpha, \beta$  は既知実定数である。(要するに  $n = 1, \Omega = (0, 1), \Gamma = \{0, 1\}, \Gamma_1 = \{0\}, \Gamma_2 = \{1\}, g_1 = \alpha, g_2 = \beta$  である。)

$$X_{g_1} = \{v \in H^1(I); v(0) = \alpha\}, \quad X = \{v \in H^1(I); v(0) = 0\}.$$

さらに、

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u'(x)v'(x) dx, \quad (f, v) = \int_0^1 f(x)v(x) dx$$

とおくと、弱解とは、弱形式

$$\langle u, v \rangle = (f, v) + \beta v(1) \quad (v \in X)$$

を満たす  $u \in X_{g_1}$  のことである。

## 4.2 有限要素への分割

区間  $[0, 1]$  を  $m$  個の小区間に分割する:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = 1.$$

ここで各区間  $e_k := [x_{k-1}, x_k]$  を**有限要素 (finite element)**、 $x_i$  を**節点 (node)** と呼ぶ。

近似関数  $\hat{u}$  は、各要素  $e_k$  上で 1 次関数に等しく、区間全体で連続な関数であるとする。これは以下に定義する  $\{\phi_i\}_{i=0}^m$  を用いて、 $\hat{g} = \alpha\phi_0$ 、基底関数として  $\{\phi_i\}_{i=1}^m$  を採用するということである。

**区分的 1 次関数の空間を張る基底関数**  $\phi_i$  を、 $[0, 1]$  上で連続で、各要素  $e_k = [x_{k-1}, x_k]$  上に制限すると 1 次関数に等しく、 $x_i$  では 1 に、他の節点  $x_j$  ( $j \neq i$ ) では 0 に等しい関数である、と定義する:

$$\phi_i \in C[0, 1], \quad \phi_i \text{ は各 } e_k \text{ で 1 次関数に等しい } (k = 1, \dots, m), \quad \phi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (j = 1, \dots, m).$$

(実は必要がないのだけれど) 式で書くと<sup>11</sup>、 $1 \leq i \leq m-1$  に対しては

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & (x \in [x_{i-1}, x_i]) \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & (x \in [x_i, x_{i+1}]) \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

<sup>11</sup>このように式で書けるけれど、そうしてもほとんど使いみちがない。 $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$  を満たす連続な区分的 1 次関数ということ、あるいはそのグラフのイメージを覚えた方がよい。



$i = 0$  に対しては

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & (x \in [x_0, x_1]) \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

$i = m$  に対しては

$$\phi_m(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{m-1}}{x_m - x_{m-1}} & (x \in [x_{m-1}, x_m]) \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

次の性質が便利である。

**補題 4.1 (基底関数の性質)**  $w_i \in \mathbb{R}$  ( $0 \leq i \leq m$ ) に対して

$$\hat{w}(x) := \sum_{i=0}^m w_i \phi_i(x)$$

とおくとき、

$$\hat{w}(x_i) = w_i \quad (0 \leq i \leq m).$$

すなわち  $\phi_i$  の係数は、節点  $x_i$  における関数値である。

念のために具体的に書くと、試行関数の空間は ( $\hat{g}_1 = \alpha\phi_0$  として)

$$\hat{X}_{g_1} = \left\{ \alpha\phi_0 + \sum_{i=1}^m a_i \phi_i; a_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \right\},$$

また試験関数の空間は

$$\hat{X} = \left\{ \sum_{i=1}^m a_i \phi_i; a_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \right\}$$

である。

$\hat{X}_{g_1}$  に属する関数  $\hat{u}$  の、要素  $e_k = [x_{k-1}, x_k]$  における表現について調べてみよう。  
準備として、要素  $e_k$  における**長さ座標**と呼ばれる関数を導入する。条件

$$\begin{aligned} L_0(x_{k-1}) &= 1, & L_0(x_k) &= 0, \\ L_1(x_{k-1}) &= 0, & L_1(x_k) &= 1 \end{aligned}$$

で定まる 1 次関数  $L_0, L_1$  を  $e_k$  の長さ座標と呼ぶ。

$$L_0 + L_1 \equiv 1$$

が成り立つ。また節点の座標  $x_{k-1}, x_k$  を用いて

$$L_0(x) = \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$$

と具体的に表わすこともできる<sup>12</sup>。

<sup>12</sup>こちらは  $\phi_i$  と違って、後で用いる。

節点  $x_i$  における  $\hat{u}$  の値を  $u_i$  とおくと、 $\hat{u}$  は  $e_k$  において、長さ座標を用いて

$$\hat{u}(x) = u_{k-1}L_0(x) + u_kL_1(x) \quad (x \in e_k)$$

と表わされる。

### 数学者向けまとめ

区間  $I = [0, 1]$  の  $m + 1$  個の分点

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 1$$

を取り、各  $k = 1, 2, \dots, m$  に対して、 $e_k := [x_{k-1}, x_k]$  とおき、 $e_k$  のことを有限要素と呼ぶ。

$I$  で連続で、各  $e_k$  上で 1 次関数に等しいような関数の全体を  $\tilde{X}$  とおくと、 $\tilde{X}$  は自然に線型空間となり、その基底関数として、次の条件で定まる  $\phi_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) が取れる。

(i)  $\phi_i \in \tilde{X}$  ( $\phi_i$  は  $I$  で連続で、各  $e_k$  上で 1 次関数に等しい)

(ii)  $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$  ( $j = 0, 1, \dots, m$ ).

任意の  $\hat{w} \in \tilde{X}$  は

$$\hat{w} = \sum_{j=0}^m w_j \phi_j$$

と表わされるが、実は  $w_j = \hat{w}(x_j)$  である。一つの要素  $e_i$  に注目するとき、 $x \in e_i$  とすると ( $\phi_j(x) = 0$  for  $j \neq i-1, i$  であるから)

$$\hat{w}(x) = \sum_{j=0}^m w_j \phi_j(x) = w_{i-1} \phi_{i-1}(x) + w_i \phi_i(x) = w_{i-1} L_0(x) + w_i L_1(x).$$

ただし  $L_0 := \phi_{i-1}|_{e_i}$ ,  $L_1 := \phi_i|_{e_i}$  とおいた。関数  $L_0, L_1$  は  $e_i$  の長さ座標と呼ばれる。これは次の条件で特徴づけられる。

$L_0, L_1$  は  $e_i$  上の 1 次関数で、 $L_0(x_{i-1}) = 1$ ,  $L_0(x_i) = 0$ ,  $L_1(x_{i-1}) = 0$ ,  $L_1(x_i) = 1$ .

## 4.3 要素係数行列の計算

要素  $e_k = [x_{k-1}, x_k]$  ( $1 \leq k \leq m$ ) における表現

$$\hat{u} = u_{k-1}L_0 + u_kL_1 = \sum_{j=0}^1 u_{k+j-1}L_j, \quad \hat{v} = v_{k-1}L_0 + v_kL_1 = \sum_{j=0}^1 v_{k+j-1}L_j$$

を用いて考えることにする。各要素  $e_k$  について

$$\langle u, v \rangle_{e_k} := \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx, \quad (f, v)_{e_k} := \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)v(x) dx$$

とすると Galerkin 法の弱形式

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + \beta v(1) \quad (v \in \hat{X})$$

は

$$(8) \quad \sum_{k=1}^m \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \sum_{k=1}^m (f, \hat{v})_{e_k} + \beta v(1) \quad (v \in \hat{X})$$

と書き直せる。

$$\begin{aligned} \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} &= \left\langle \sum_{j=0}^1 u_{k+j-1} L_j, \sum_{i=0}^1 v_{k+i-1} L_i \right\rangle_{e_k} = \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 u_{k+j-1} v_{k+i-1} \langle L_j, L_i \rangle_{e_k} \\ &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 v_{k+i-1} A_{ij}^{(k)} u_{k+j-1}, \end{aligned}$$

ただし

$$A_{ij}^{(k)} := \langle L_j, L_i \rangle_{e_k}.$$

一方、

$$(f, \hat{v})_{e_k} = (f, \sum_{j=0}^1 v_{k+j-1} L_j)_{e_k} = \sum_{j=0}^1 v_{k+j-1} (f, L_j)_{e_k} = \sum_{j=0}^1 v_{k+j-1} f_j^{(k)},$$

ただし

$$f_j^{(k)} := (f, L_j)_{e_k}.$$

また

$$\beta \hat{v}(1) = \beta v_m.$$

そこで

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &:= \begin{pmatrix} u_{k-1} \\ u_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_k := \begin{pmatrix} v_{k-1} \\ v_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_k := \begin{pmatrix} f_0^{(k)} \\ f_1^{(k)} \end{pmatrix}, \quad A_k := \begin{pmatrix} A_{00}^{(k)} & A_{01}^{(k)} \\ A_{10}^{(k)} & A_{11}^{(k)} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{g}_m &:= \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおく。 $\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k$  は要素節点パラメーター・ベクトル、 $\mathbf{f}_k$  は要素自由項ベクトル、 $A_k$  は要素係数行列と呼ばれる。すると  $A_k$  は対称行列で、

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \mathbf{v}_k^T A_k \mathbf{u}_k, \quad (f, \hat{v})_{e_k} = \mathbf{v}_k^T \mathbf{f}_k \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad \beta \hat{v}(1) = \mathbf{v}_m^T \mathbf{g}_m$$

となる。ここで  $T$  は転置 (transpose) を表す。 $\mathbf{b}^T \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  である。

後のために実際に  $A_k, \mathbf{f}_k$  を求めよう。

$$\langle L_i, L_j \rangle_{e_k} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} L_i'(x) L_j'(x) dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\varepsilon}{(x_k - x_{k-1})^2} dx = \frac{\varepsilon}{x_k - x_{k-1}}, \quad \varepsilon := \begin{cases} 1 & (i = j) \\ -1 & (i \neq j) \end{cases}$$

であるから、

$$A_k = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

一方

$$f_j^{(k)} = (f, L_j)_{e_k} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) L_j(x) dx \quad (j = 0, 1).$$

この右辺の積分は  $f$  に応じて何らかの手段で計算 (場合によっては近似計算) しておく。例えば

$$f \doteq f(x_{k-1})L_0 + f(x_k)L_1 \quad (\text{on } e_k)$$

と 1 次補間近似を利用して

$$f_j^{(k)} = (f, L_j)_{e_k} \doteq (f(x_{k-1})L_0 + f(x_k)L_1, L_j)_{e_k} = f(x_{k-1})(L_0, L_j)_{e_k} + f(x_k)(L_1, L_j)_{e_k}.$$

ところで  $(x = x_{k-1} + (x_k - x_{k-1})t \ (0 \leq t \leq 1))$  のような変数変換をすると良い

$$\begin{aligned} (L_0, L_0)_{e_k} &= (L_1, L_1)_{e_k} = (x_k - x_{k-1}) \int_0^1 t^2 dt = \frac{x_k - x_{k-1}}{3}, \\ (L_0, L_1)_{e_k} &= (L_1, L_0)_{e_k} = (x_k - x_{k-1}) \int_0^1 t(1-t) dt = \frac{x_k - x_{k-1}}{6} \end{aligned}$$

であるから

$$\mathbf{f}_k \doteq \frac{(x_k - x_{k-1})}{6} \begin{pmatrix} 2f(x_{k-1}) + f(x_k) \\ f(x_{k-1}) + 2f(x_k) \end{pmatrix}.$$

#### 4.4 近似方程式の組み立て — 直接剛性法

前小節で与えたベクトル、行列を  $m+1$  次元に拡大する。まず

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

とおく。繰り返しになるが、 $u_i, v_i$  はそれぞれ  $\hat{u}, \hat{v}$  の  $x_i$  での値であり、 $\phi_i$  の係数でもある:

$$u_i = \hat{u}(x_i), \quad v_i = \hat{v}(x_i), \quad \hat{u}(x) = \sum_{i=0}^m u_i \phi_i(x), \quad \hat{v}(x) = \sum_{i=0}^m v_i \phi_i(x).$$

$\mathbf{f}_k, A_k, \mathbf{g}_m^*$  については、0 を補って、 $\mathbb{R}^{m+1}, M(m+1; \mathbb{R})$  の元に拡大する:

$$\mathbf{f}_k^* := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_0^{(k)} \\ f_1^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_k^* := \left( \begin{array}{c|cc|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & A_{00}^{(k)} & A_{01}^{(k)} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & A_{10}^{(k)} & A_{11}^{(k)} & \mathbf{0} \\ \hline \end{array} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

$$\mathbf{g}_m^* := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

これらを用いると

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \mathbf{v}^T A_k^* \mathbf{u}, \quad (f, \hat{v})_{e_k} = \mathbf{v}^T \mathbf{f}_k^* \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad \beta \hat{v}(1) = \mathbf{v}^T \mathbf{g}_m^*.$$

弱形式を書き直した (8) は

$$(9) \quad \sum_{k=1}^m \mathbf{v}^T A_k^* \mathbf{u} = \sum_{k=1}^m \mathbf{v}^T \mathbf{f}_k^* + \mathbf{v}^T \mathbf{g}_m^* \quad (\mathbf{v} \in Y)$$

と書き直される。ここで  $Y$  は、 $\hat{v} = \sum_{i=1}^m v_i \phi_i$  が  $\hat{X}$  に属するような  $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_m)^T$  の全体、すなわち

$$Y := \left\{ \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}; v_0 = 0 \right\}.$$

(9) は

$$\mathbf{v}^T \left( \sum_{k=1}^m A_k^* \right) \mathbf{u} = \mathbf{v}^T \left( \sum_{k=1}^m \mathbf{f}_k^* + \mathbf{g}_m^* \right) \quad (\mathbf{v} \in Y)$$

と書き直せる。ゆえに

$$\mathbf{A}^* := \sum_{k=1}^m A_k^*, \quad \mathbf{f}^* := \sum_{k=1}^m \mathbf{f}_k^* + \mathbf{g}_m^*$$

とおけば

$$\mathbf{v}^T \mathbf{A}^* \mathbf{u} = \mathbf{v}^T \mathbf{f}^* \quad (\mathbf{v} \in Y).$$

すなわち

$$\mathbf{v}^T (\mathbf{A}^* \mathbf{u} - \mathbf{f}^*) = 0 \quad (\mathbf{v} \in Y).$$

ここで  $\mathbf{v}$  は  $Y$  の任意の元であるから

$$\mathbf{A}^* \mathbf{u} - \mathbf{f} \in Y^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}; \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

つまりは

$$(\mathbf{A}^* \mathbf{u} - \mathbf{f}^*) \text{ の最初の成分以外} = 0.$$

すなわち

$$(10) \quad \mathbf{A}^{**} \mathbf{u} = \mathbf{f}^{**}.$$

ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{**} &:= \mathbf{A}^* \text{ の第 } 0 \text{ 行を除いた } m \times (m+1) \text{ 行列,} \\ \mathbf{f}^{**} &:= \mathbf{f}^* \text{ の第 } 0 \text{ 成分を除いた } m \text{ 次元縦ベクトル.} \end{aligned}$$

この段階で、係数行列  $\mathbf{A}^{**}$  は正方行列ではないことに注意しよう。

ところで  $u_0 = \alpha$  は分かっているので、以下、 $u_0$  の消去を実行する (すると実は正方行列係数の方程式が得られる)。

$\mathbf{u}^* := \mathbf{u}$  の第 0 成分を除いた  $m$  次元縦ベクトル

$$\text{i.e. } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \mathbf{u}^* \end{pmatrix},$$

$A := \mathbf{A}^{**}$  の第 0 列を除いた  $m$  次正方行列

$$\text{i.e. } \mathbf{A}^{**} = \left( \begin{array}{c|c} A_{10}^* & \\ \vdots & A \\ A_{m0}^* & \end{array} \right), \quad A := \begin{pmatrix} A_{11}^* & \cdots & A_{1m}^* \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1}^* & \cdots & A_{mm}^* \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f} := \mathbf{f}^* - \begin{pmatrix} A_{10}^* \\ \vdots \\ A_{m0}^* \end{pmatrix} \alpha$$

とおく。

$$\mathbf{A}^{**} \mathbf{u} = \left( \begin{array}{c|c} A_{10}^* & \\ \vdots & A \\ A_{m0}^* & \end{array} \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \mathbf{u}^* \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} A_{10}^* \\ \vdots \\ A_{m0}^* \end{pmatrix} + \mathbf{A} \mathbf{u}^*$$

であるから、(10) は

$$\mathbf{A} \mathbf{u}^* = \mathbf{f}$$

と同値である。

このように、局所的な(要素の)情報から方程式を組み立てる操作を**直接剛性法** (direct stiffness method) という。

(参考情報: 「直接剛性法」は、有限要素法の直接のルーツである**構造力学**に由来する用語である。構造力学の問題において、 $A$  は剛性行列という名前が付いている。)

次のことを覚えておくとよい。

- 係数行列は基本境界条件に対応する節点番号の行と列を抜いたもの
- 基本境界条件の情報は右辺のベクトルに組み込む
- 未知数は節点パラメーターであり、基底関数は節点に対応して作る

## 4.5 具体的にすることのまとめ

**第1段** 各要素  $e_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) について、 $A_k, \mathbf{f}_k$  を求める:

$$A_k = \begin{pmatrix} \langle L_0, L_0 \rangle_{e_k} & \langle L_1, L_0 \rangle_{e_k} \\ \langle L_0, L_1 \rangle_{e_k} & \langle L_1, L_1 \rangle_{e_k} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_k = \begin{pmatrix} f(x_{k-1})(L_0, L_0)_{e_k} + f(x_k)(L_1, L_0)_{e_k} \\ f(x_{k-1})(L_0, L_1)_{e_k} + f(x_k)(L_1, L_1)_{e_k} \end{pmatrix},$$

$$\langle L_j, L_i \rangle_{e_k} = \int_{e_k} L_j'(x) L_i'(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{x_k - x_{k-1}} & (i = j) \\ -\frac{1}{x_k - x_{k-1}} & (i \neq j), \end{cases}$$

$$(L_j, L_i)_{e_k} = \int_{e_k} L_j(x) L_i(x) dx = \begin{cases} \frac{x_k - x_{k-1}}{3} & (i = j) \\ \frac{x_k - x_{k-1}}{6} & (i \neq j) \end{cases}$$

を計算して、それを  $m + 1$  次正方行列  $A_k^*$ ,  $m + 1$  次元ベクトル  $\mathbf{f}_k^*$  に拡大して、

$$A^* := \sum_{k=1}^m A_k^*, \quad \mathbf{f}^* := \sum_{k=1}^m \mathbf{f}_k^* + \mathbf{g}_m^*$$

を計算し、

$A := A^*$  から第0行と第0列を除いたもの、

$$\mathbf{f}^{**} := \mathbf{f}^* \text{ から第0成分を除いたもの}, \quad \mathbf{f} := \mathbf{f}^{**} - \alpha \begin{pmatrix} A_{10} \\ A_{20} \\ \vdots \\ A_{m0} \end{pmatrix}$$

を求める。

## 第2段 連立1次方程式

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \mathbf{f}$$

を解いて  $u_1, \dots, u_m$  を求め、

$$\hat{u} = \alpha\phi_0 + \sum_{i=1}^m u_i\psi_i.$$

### 4.6 連立1次方程式の具体形

$\bar{\Omega} = \overline{(0,1)} = [0,1]$  を4等分して、各小区間を有限要素と考える。つまり  $m=4$  で

$$x_i := ih \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4),$$

ただし  $h = 1/4$ . そして

$$e_k := [x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

すると

$$A_k = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{f}_k = \begin{pmatrix} f_0^{(k)} \\ f_1^{(k)} \end{pmatrix}, \quad f_j^{(k)} = \int_{e_k} f(x)L_j(x) dx \quad (L_j \text{ は } k \text{ によるので記号が怪しい}),$$
$$\mathbf{g}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

特に (簡単のため)  $f(x) \equiv \bar{f}$  (定数関数) とすると、

$$f_j^{(k)} = \frac{\bar{f}h}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



$$\begin{aligned}
A^* &= A_1^* + A_2^* + A_3^* + A_4^* \\
&= \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}^* &= \mathbf{f}_1^* + \mathbf{f}_2^* + \mathbf{f}_3^* + \mathbf{f}_4^* + \mathbf{g}_4^* \\
&= \frac{\bar{f}h}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\bar{f}h}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\bar{f}h}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\bar{f}h}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \\
&= \bar{f}h \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

よって方程式  $A^{**}\mathbf{u} = \mathbf{f}^{**}$  は

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \bar{f}h \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

最後に  $u_0 = u(0) = \alpha$  を代入して  $u_0$  を消去すると

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \bar{f}h \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha/h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

この最後の方程式は、差分法 (Neumann 境界条件を仮想格子点を導入した中心差分近似で処理したもの) で得られる連立 1 次方程式と同じである。つまり

- 規則的な有限要素分割をしたとき、有限要素法は差分法と近い。
- 差分法で自明でない工夫 (仮想格子点の導入) をして得られた Neumann 境界条件の近似に相当することが、有限要素法ではごく自然に得られる。有限要素法は Neumann 境界条件の近似に強い。

最後に、境界条件を

$$u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta$$

に替えた、Dirichlet 境界値問題を調べておこう。この場合は、次の連立 1 次方程式が得られる。

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \bar{f}h \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha/h \\ 0 \\ \beta/h \end{pmatrix}.$$

## 4.7 サンプル・プログラム

以下に紹介するプログラムが対象としている問題は、 $f \equiv 1$  で、境界条件は同次、すなわち  $\alpha = \beta = 0$  の場合のプログラムとなっている。

具体的に書き下すと

$$-u'' = 1, \quad u(0) = u'(1) = 0$$

という問題である。厳密解は  $u(x) = x(2-x)/2$  と求まる。

このうち  $f$  は容易に別のものに替えられるが、境界条件を非同次の問題に対応するようにプログラムを書き換えるのを練習問題とする。

```

1 /* fem1d.c -- 1次元 Poisson 方程式を有限要素法で解く */
2
3 /*
4 * 【境界値問題】
5 *  $\Omega=(a,b)$  は数直線上の領域 (开区間) で、
6 * その境界  $\Gamma$  は  $\Gamma_1, \Gamma_2$  と二つの部分からなる。
7 *  $\Omega$  上与えられた関数  $f$  に対して、
8 *
9 *  $-u''=f$  in  $\Omega$ 
10 *
11 *  $u=0$  on  $\Gamma_1, \quad \partial u/\partial n=0$  on  $\Gamma_2$ 
12 *
13 * を満たす  $u=u(x)$  を求めよ。ここで  $n$  は  $\Gamma$  の外向き単位法線ベクトル。

```

```

14  *
15  * f ≡ 1, Γ1={0}, Γ2={1} つまり -u''=1, u(0)=u'(1)=0 とする
16  * u(x)=x(2-x)/2=-x2/2+x
17  *
18  * 出力 fem1d.out を gnuplot で処理すると解のグラフが描ける。
19  * gnuplot> plot "fem1d.out" with linespoints
20  */
21
22 #include <stdio.h>
23 #include <stdlib.h>
24 #include <math.h>
25
26 typedef double *vector;
27 typedef vector *matrix;
28
29 double f(double);
30 vector new_vector(int);
31 matrix new_matrix(int, int);
32 void assem(int, int, int, matrix, vector, vector x, int ibc[]);
33 void ecm(int, vector, double [2][2], double [2]);
34 void output(int, vector);
35 void output2(int nnode, vector x, vector u);
36 void solve(matrix, vector, int);
37
38 /* 方程式の非同次項 */
39 double f(double x)
40 {
41     return 1.0;
42 }
43
44 /*      main program
45  *      the finite element method for the Poisson equation
46  */
47
48 int main()
49 {
50     /*
51      * nnode      節点の総数 (m)
52      * nelmt      有限要素の総数
53      * nbc        基本境界条件を課す節点の総数
54      * x[]        節点の座標
55      * ibc[]      基本境界条件を課す節点の番号
56      * am[][]     全体係数行列
57      * fm[]       全体ベクトル
58      *
59      * 注意: 節点番号は 0 から、要素番号は 1 からつける。よって
60      * 節点番号 0,1,...,nnode-1
61      * 要素番号 1,...,nelmt
62      * のような範囲にわたる
63      *
64      */
65
66     int ie, nnode, nelmt, nbc;
67     double h;
68     vector x, fm;
69     matrix am;

```

```

70     int ibc[2];
71
72     /* 総要素数 */
73     nelmt = 10;
74     /* 節点の総数 */
75     nnode = nelmt + 1;
76     /* ディリクレ境界にある節点の個数 */
77     nbc = 1;
78     /* メモリーの確保 */
79     x = new_vector(nnode);
80     fm = new_vector(nnode);
81     am = new_matrix(nnode, nnode);
82     /* 節点の座標（ここでは等分割する） */
83     h = 1.0 / nelmt;
84     for (ie = 0; ie < nnode; ie++)
85         x[ie] = ie * h;
86     /* ディリクレ境界にある節点の番号 */
87     ibc[0] = 0;
88
89     assem(nnode, nelmt, nbc, am, fm, x, ibc);
90     solve(am, fm, nnode);
91     output(nnode, fm);
92     output2(nnode, x, fm);
93     return 0;
94 }
95
96 /* "直接剛性法" --- 連立1次方程式を組み上げる */
97 void assem(int nnode, int nelmt, int nbc, matrix am, vector fm,
98           vector x, int ibc[2])
99 {
100     int i, j, ie, ii, jj;
101     /* the direct stiffness method (直接剛性法) */
102     double ae[2][2], fe[2];
103     /* initial clear */
104     for (i = 0; i < nnode; i++) {
105         fm[i] = 0.0;
106         for (j = 0; j < nnode; j++)
107             am[i][j] = 0.0;
108     }
109     /* assemblage of total matrix and vector (全体行列, 全体ベクトルの組立) */
110     for (ie = 1; ie <= nelmt; ie++) {
111         ecm(ie, x, ae, fe);
112         for (i = 0; i < 2; i++) {
113             ii = ie + i - 1;
114             fm[ii] += fe[i];
115             for (j = 0; j < 2; j++) {
116                 jj = ie + j - 1;
117                 am[ii][jj] += ae[i][j];
118             }
119         }
120     }
121     /* the homogeneous Dirichlet condition (同次Dirichlet境界条件) */
122     /* 番号 ibc[0]..ibc[nbc-1] の節点での値は既知であるから、
123     * その番号(=:ii) の行と列は対角成分以外 := 0、対角成分 := 1 とする。
124     */
125     for (i = 0; i < nbc; i++) {

```

```

126     ii = ibc[i];
127     fm[ii] = 0.0;
128     for (j = 0; j < nnode; j++)
129         am[ii][j] = am[j][ii] = 0.0;
130     am[ii][ii] = 1.0;
131 }
132 }
133
134 /* 要素係数行列, 要素自由ベクトルを計算する */
135 void ecm(int ie, vector x, double ae[2][2], double fe[2])
136 {
137     double f0 = f(x[ie-1]), f1 = f(x[ie]);
138     /* ie 番目の要素 [x_{ie-1}, x_{ie}] の長さ */
139     double d = x[ie] - x[ie-1];
140
141     /* 要素係数行列 A_e=(<Li,Lj>)
142     *
143     *   これは講義でもやったように
144     *
145     *           1           [ 1  -1]
146     *   A_e=----- |         |
147     *       x[ie]-x[ie-1] [-1   1]
148     */
149
150     ae[0][0] = 1 / d; ae[0][1] = - 1 / d;
151     ae[1][0] = - 1 / d; ae[1][1] = 1 / d;
152
153     /* 要素自由項ベクトル
154     *
155     *   f_e=((f,L0),(f,L1))^T
156     *
157     *   準備として
158     *   (L0,L0)=(L1,L1)=(x[ie]-x[ie-1]) ∫ x^2 dx=(x[ie]-x[ie-1])/3
159     *                               [0,1]
160     *   (L0,L1)=(L1,L0)=(x[ie]-x[ie-1]) ∫ x(1-x) dx=(x[ie]-x[ie-1])/6
161     *                               [0,1]
162     *   f を 1 次補間する
163     *   f ≐ f0 L0+f1 L1
164     *
165     *   1 次補間に基づいた近似
166     *   (f,L0) ≐ f0(L0,L0)+f1(L1,L0)=(x[ie]-x[ie-1])(2f0+f1)/6
167     *   (f,L1) ≐ f0(L0,L1)+f1(L1,L1)=(x[ie]-x[ie-1])(f0+2f1)/6
168     *
169     */
170
171     fe[0] = d * (2 * f0 + f1) / 6;
172     fe[1] = d * (f0 + 2 * f1) / 6;
173 }
174
175 /* Gauss の消去法により連立一次方程式を解く */
176 void solve(matrix a, vector f, int m)
177 {
178     int m1, i, j, k;
179     double aa;
180     /* forward elimination; */
181     m1 = m - 1;

```

```

182     for (i = 0; i < m1; i++) {
183         for (j = i + 1; j < m; j++) {
184             aa = a[j][i] / a[i][i];
185             f[j] -= aa * f[i];
186             for (k = i + 1; k < m; k++)
187                 a[j][k] -= aa * a[i][k];
188         }
189     }
190     /* backward substitution */
191     f[m-1] /= a[m-1][m-1];
192     for (i = m - 2; i >= 0; i--) {
193         for (j = i + 1; j < m; j++)
194             f[i] -= a[i][j] * f[j];
195         f[i] /= a[i][i];
196     }
197 }
198
199 void output(int nnode, vector fm)
200 {
201     int i;
202     /* output of approximate nodal values of u */
203     printf("nodal values of u (節点での u の値)\n");
204     for (i = 0; i < 3; i++)
205         printf("    i        u    ");
206     for (i = 0; i < nnode; i++) {
207         if (i % 3 == 0) printf("\n");
208         printf("%4d %11.3e", i, fm[i]);
209     }
210     printf("\n");
211 }
212
213 void output2(int nnode, vector x, vector u)
214 {
215     int i;
216     FILE *fp;
217     for (i = 0; i < nnode; i++)
218         printf("%f %f\n", x[i], u[i]);
219     if ((fp = fopen("fem1d.out", "w")) != NULL) {
220         for (i = 0; i < nnode; i++)
221             fprintf(fp, "%f %f\n", x[i], u[i]);
222         fclose(fp);
223     }
224 }
225
226 vector new_vector(int n)
227 {
228     return malloc(sizeof(double) * n);
229 }
230
231 void del_vector(vector a)
232 {
233     free(a);
234 }
235
236 matrix new_matrix(int m, int n)
237 {

```

```

238 int i;
239 matrix a;
240 if ((a = malloc(m * sizeof(vector))) == NULL) {
241     return NULL;
242 }
243 for (i = 0; i < m; i++) {
244     if ((a[i] = new_vector(n)) == NULL) {
245         while (--i >= 0) free(a[i]);
246         free(a);
247         return NULL;
248     }
249 }
250 return a;
251 }

```

#### 4.7.1 解説

- main() を読むと分かるように、最初に
  - nnode 総節点数
  - nelmt 総要素数
  - nbc デイリクレ境界にある接点の個数 (1 または 2)
  - x[] 節点の座標
  - ibc デイリクレ境界にある接点の節点番号

を決めている。

- 連立 1 次方程式を構成するのは、関数 `assem()` で行っている。作業内容は 3 つに分かれる。
  1. `am`, `fm` を 0 クリアする。
  2. すべての有限要素について、要素係数行列 `ae`, 要素自由ベクトル `fe` を計算して、それぞれ全体行列 `am`、全体自由ベクトル `fm` に算入する。
  3. デイリクレ境界上にある節点に対応する部分を修正する。
- `ecm()` で必要となる事項の復習。  $e_k = [x_{k-1}, x_k]$  とすると、

$$A_k = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}n_k = \begin{pmatrix} (f, L_0)_{e_k} \\ (f, L_1)_{e_k} \end{pmatrix}$$

であったが、 $f$  は

$$f(x) \doteq f(x_{k-1})L_0(x) + f(x_k)L_1(x) \quad (x \in e_k)$$

と 1 次近似することにすれば、

$$(f, L_j)_{e_k} \doteq (f(x_{k-1})L_0 + f(x_k)L_1, L_j)_{e_k} = f(x_{k-1})(L_0, L_j)_{e_k} + f(x_k)(L_1, L_j)_{e_k}.$$

ここで

$$(L_0, L_0)_{e_k} = (L_1, L_1)_{e_k} = (x_k - x_{k-1}) \int_0^1 x^2 dx = \frac{x_k - x_{k-1}}{3},$$
$$(L_0, L_1)_{e_k} = (L_1, L_0)_{e_k} = (x_k - x_{k-1}) \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{x_k - x_{k-1}}{6}$$

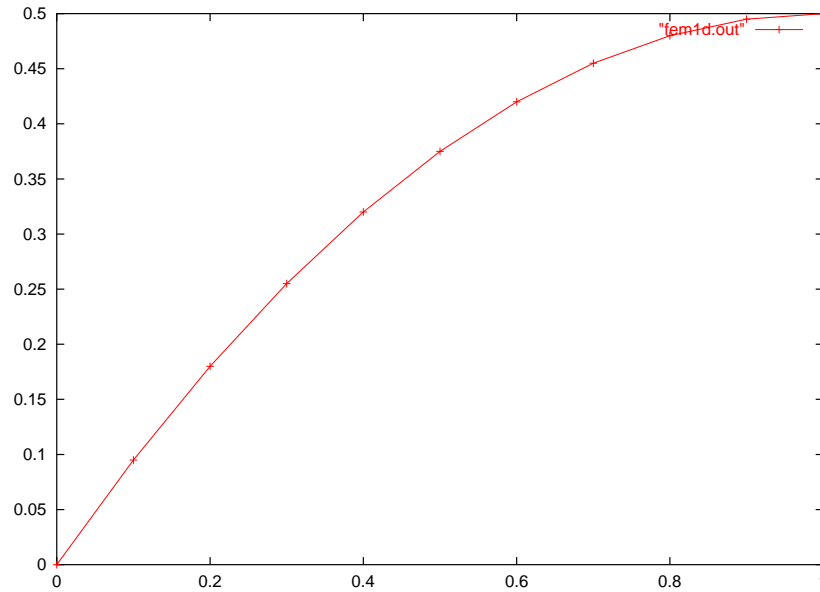
であるから、

$$f_k \doteq \frac{x_k - x_{k-1}}{6} \begin{pmatrix} 2f(x_{k-1}) + f(x_k) \\ f(x_{k-1}) + 2f(x_k) \end{pmatrix}.$$

#### 4.7.2 実験

```
oyabun% gcc -o fem1d fem1d.c
oyabun% ./fem1d
nodal values of u (節点での u の値)
  i      u      i      u      i      u
  0  0.000e+00  1  9.500e-02  2  1.800e-01
  3  2.550e-01  4  3.200e-01  5  3.750e-01
  6  4.200e-01  7  4.550e-01  8  4.800e-01
  9  4.950e-01 10  5.000e-01
oyabun% cat fem1d.out
0.000000 0.000000
0.100000 0.095000
0.200000 0.180000
0.300000 0.255000
0.400000 0.320000
0.500000 0.375000
0.600000 0.420000
0.700000 0.455000
0.800000 0.480000
0.900000 0.495000
1.000000 0.500000
oyabun% gnuplot
gnuplot> plot "fem1d.out" with linespoints
```





### 4.7.3 やってみよう

1. 両側ディリクレ条件  $u(0) = u(1) = 0$  の問題を解いてみよう。
2. 非同次ディリクレ条件  $u(0) = \alpha$  の問題を解いてみよう。
3. 非同次 Neumann 条件  $u'(1) = \beta$  の問題を解いてみよう。
4.  $-(pu')' = f$  という一般の楕円型方程式の問題を解いてみよう。

## 5 2次元の有限要素法

### 5.1 有限要素への分割と基底関数

領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  を三角形要素に分割する:

$$\bar{\Omega} := \hat{\Omega} := \bigcup_{k=1}^{N_e} e_k.$$

つまり有限要素  $e_k$  は三角形である。1次元領域 (开区間!) の場合と異なり、境界が「曲がっている」ことがあるため、 $\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{N_e} e_k$  となることは一般には期待できない ( $\Omega$  が多角形領域であるような場合は、等式が成り立つように分割することはそれほど困難ではない)。

$N_e$  は要素の総数 (the number of elements) で、プログラムでは NELMT のような名前の変数で記憶されることが多い。

有限要素の頂点を**節点** (node) と呼び、 $\{P_i\}_{i=1}^m$  のように番号をつけておく。

$m$  は節点の総数 (the number of nodes) で、プログラムでは NNODE のような名前の変数で記憶されることが多い。

基底関数としては、 $\hat{\Omega}$  上連続で、各有限要素  $e_k$  上で  $x$  と  $y$  の 1 次多項式関数に等しいもの — 連続区分的 1 次関数 — の族  $\{\phi_i\}_{i=1}^m$  で、条件

$$(11) \quad \phi_i(P_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m)$$

満たすものを採用する。

## 5.2 三角形 $e$ 上の 1 次関数 $L_i$ と $(L_j, L_i)_e, \langle L_j, L_i \rangle_e$

三角形要素  $e$  に属する節点を、反時計まわりに  $N_i = (x_i, y_i)$  ( $i = 0, 1, 2$ ) とする。

### 5.2.1 三角形要素 $e$ の面積 $|e|$

後でしばしば必要になるので、 $e$  の面積  $|e|$  を計算しておこう。

$$(12) \quad |e| = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} [(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0)].$$

### 5.2.2 三角形要素の面積座標 $L_i$

任意の 1 次関数

$$\hat{u}(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y$$

は、3 節点  $N_i$  における値  $u^i := \hat{u}(N_i)$  ( $i = 0, 1, 2$ ) を指定すれば定まる ( $u_i = \hat{u}(P_i)$  と混同しないように)。これは、直観的にも明らかであるが (図形のイメージで考えると、平面は、その上の一直線上にない 3 点を指定すれば定まる、ということ)、すぐ後で証明も与える。

特に、節点  $N_i$  で 1, 他の節点で 0 となる 1 次関数を  $L_i$  とする ( $i = 0, 1, 2$ )。つまり

$$(13) \quad L_i(N_j) = L_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 0, 1, 2).$$

この  $(L_0, L_1, L_2)$  を用いると、任意の 1 次関数  $\hat{u}$  は、

$$(14) \quad \hat{u}(x, y) = \sum_{i=0}^2 u^i L_i(x, y) \quad ((x, y) \in e)$$

と表される (両辺ともに 1 次関数で、相異なる 3 点  $N_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) における値が等しいから、恒等的に等しい)。つまり、 $(L_0, L_1, L_2)$  は 1 次関数の空間の基底になる。

$P \in e$  を固定したとき、対応する 3 実数  $(L_0(P), L_1(P), L_2(P))$  を  $P$  の面積座標と呼ぶ。任意の  $P$  に対して

$$L_0(P) + L_1(P) + L_2(P) = 1$$

が成り立つ。

( $L_i$  のグラフ  $z = L_i(x, y)$  の鳥瞰図と等高線を描いておこう。)

### 5.2.3 面積座標の積の積分

面積座標の積の積分については、便利な公式がある。

0 以上の任意の整数  $i, j, k$  に対して

$$(15) \quad \iint_e L_0(x, y)^i L_1(x, y)^j L_2(x, y)^k dx dy = 2|e| \frac{i!j!k!}{(i+j+k+2)!} \quad (|e| \text{ は } e \text{ の面積}).$$

**証明**  $P_0 = (0, 0), P_1 = (1, 0), P_2 = (0, 1)$  で囲まれる三角形を  $\Delta$  とし、1 次関数  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$\varphi(P_0) = N_0, \quad \varphi(P_1) = N_1, \quad \varphi(P_2) = N_2$$

で定める。実は

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

変数変換  $(x, y) = \varphi(u, v)$  を行なうと、

$$\begin{aligned} \iint_e L_0^i L_1^j L_2^k dx dy \\ = \iint_{\Delta} L_0(\varphi(u, v))^i L_1(\varphi(u, v))^j L_2(\varphi(u, v))^k \times |\det \varphi'(u, v)| du dv. \end{aligned}$$

また

$$\det \varphi'(u, v) = \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} = 2|e|$$

である。 $L_i(\varphi(u, v))$  は (1 次関数と 1 次関数の合成であるから) 1 次関数で、

$$L_i(\varphi(P_j)) = \delta_{ij}$$

を満たすことから、

$$L_0(\varphi(u, v)) = 1 - u - v, \quad L_1(\varphi(u, v)) = u, \quad L_2(\varphi(u, v)) = v.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \iint_e L_0^i L_1^j L_2^k dx dy &= 2|e| \iint_{\Delta} (1 - u - v)^i u^j v^k du dv \\ &= 2|e| \int_0^1 u^j \left( \int_0^{1-u} (1 - u - v)^i v^k dv \right) du. \end{aligned}$$

内側の積分で、 $v = (1 - u)t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) と変数変換すると、 $dv = (1 - u)dt$ ,  $(1 - u - v)^i = ((1 - u) - (1 - u)t)^i = (1 - u)^i(1 - t)^i$  であるから、

$$\int_0^{1-u} (1 - u - v)^i v^k dv = \int_0^1 (1 - u)^i (1 - t)^i (1 - u)^k t^k \cdot (1 - u) dt = (1 - u)^{i+k+1} \int_0^1 (1 - t)^i t^k dt.$$

ゆえに<sup>13</sup>

$$\begin{aligned}
 \iint_e L_0^i L_1^j L_2^k dx dy &= 2|e| \int_0^1 (1-u)^{i+k+1} u^j du \int_0^1 (1-t)^i t^k dt \\
 &= 2|e| B(i+k+2, j+1) B(i+1, k+1) \\
 &= 2|e| \frac{\Gamma(i+k+2)\Gamma(j+1)}{\Gamma(i+j+k+3)} \frac{\Gamma(i+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(i+k+2)} \\
 &= 2|e| \frac{\Gamma(i+1)\Gamma(j+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(i+j+k+3)} \\
 &= 2|e| \frac{i!j!k!}{(i+j+k+2)!} \blacksquare
 \end{aligned}$$

特に

$$(L_j, L_i)_e = \begin{cases} \iint_e L_0^2 dx dy = 2|e| \frac{2!0!0!}{(2+0+0+2)!} = \frac{1}{6}|e| & (i=j \text{ のとき}) \\ \iint_e L_0 L_1 dx dy = 2|e| \frac{1!1!0!}{(1+1+0+2)!} = \frac{1}{12}|e| & (i \neq j \text{ のとき}). \end{cases}$$

#### 5.2.4 面積座標 $L_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y$ の係数決定

$L_i(x, y)$  ( $i = 0, 1, 2$ ) の係数を

$$L_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y$$

とおくと、

$$\delta_{ij} = L_i(x_j, y_j) = a_i + b_i x_j + c_i y_j = (1 \ x_j \ y_j) \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}$$

であるから、

$$I = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = A^{-1}, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

---

<sup>13</sup>ベータ関数  $B(p, q) := \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1} dt$  とガンマ関数  $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$  について、 $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ ,  $\Gamma(n+1) = n!$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) という公式が成り立つ。

Cramer の公式によって、

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & y_0 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & y_0 \\ 1 & y_1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T \\
&= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} x_1 y_2 - y_1 x_2 & -(y_2 - y_1) & x_2 - x_1 \\ -(x_0 y_2 - y_0 x_2) & y_2 - y_0 & -(x_2 - x_0) \\ x_0 y_1 - y_0 x_1 & -(y_1 - y_0) & x_1 - x_0 \end{pmatrix}^T \\
&= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} x_1 y_2 - y_1 x_2 & x_2 y_0 - y_2 x_0 & x_0 y_1 - y_0 x_1 \\ y_1 - y_2 & y_2 - y_0 & y_0 - y_1 \\ x_2 - x_1 & x_0 - x_2 & x_1 - x_0 \end{pmatrix}. \\
\det A &= \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 0 & x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ 0 & x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} = 2|e| > 0.
\end{aligned}$$

$(i, j, k)$  は  $(0, 1, 2)$  の偶置換とする<sup>14</sup>。これは

$$(i, j, k) = (0, 1, 2), (1, 2, 0), (2, 0, 1)$$

ということを意味している。このとき、

$$a_i^* := x_j y_k - x_k y_j, \quad b_i^* := y_j - y_k, \quad c_i^* := x_k - x_j$$

とおくと、すなわち

$$\begin{aligned}
a_0^* &:= x_1 y_2 - x_2 y_1, & b_0^* &:= y_1 - y_2, & c_0^* &:= x_2 - x_1, \\
a_1^* &:= x_2 y_0 - x_0 y_2, & b_1^* &:= y_2 - y_0, & c_1^* &:= x_0 - x_2, \\
a_2^* &:= x_0 y_1 - x_1 y_0, & b_2^* &:= y_0 - y_1, & c_2^* &:= x_1 - x_0
\end{aligned}$$

とおくと、

$$A^{-1} = \frac{1}{2|e|} \begin{pmatrix} a_0^* & a_1^* & a_2^* \\ b_0^* & b_1^* & b_2^* \\ c_0^* & c_1^* & c_2^* \end{pmatrix}.$$

特に

$$(16) \quad \langle L_j, L_i \rangle_e = \iint_e \nabla L_j \cdot \nabla L_i \, dx \, dy = \iint_e \begin{pmatrix} b_j \\ c_j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_i \\ c_i \end{pmatrix} \, dx \, dy = (b_j b_i + c_j c_i) |e|.$$

<sup>14</sup> $(0, 1, 2)$  の置換は、 $(0, 1, 2)$ ,  $(0, 2, 1)$ ,  $(1, 0, 2)$ ,  $(1, 2, 0)$ ,  $(2, 0, 1)$ ,  $(2, 1, 0)$  の 6 通りで、このうち  $(0, 2, 1)$ ,  $(2, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 2)$  は互換であるから明らかに奇置換である。のこりの  $(0, 1, 2)$ ,  $(1, 2, 0)$ ,  $(2, 0, 1)$  が偶置換のはずである。

### 5.3 要素係数行列の計算

「積分は積分範囲を分割して計算し、後から和を取ればよい」ので

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X})$$

は

$$(17) \quad \sum_{k=1}^{N_e} \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \sum_{k=1}^{N_e} (f, \hat{v})_{e_k} + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X})$$

となる。ただし

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \int_{e_k} \nabla \hat{u}(x) \cdot \nabla \hat{v}(x) dx, \quad (f, \hat{v})_{e_k} = \int_{e_k} f(x) \hat{v}(x) dx, \quad [g_2, \hat{v}] = \int_{\Gamma_2} f \hat{v} d\sigma.$$

そこで  $u^j := \hat{u}(N_j)$ ,  $v^j := \hat{v}(N_j)$  ( $j = 0, 1, 2$ ) を用いて、

$$\hat{u} = \sum_{j=0}^2 u^j L_j, \quad \hat{v} = \sum_{i=0}^2 v^i L_i \quad (e_k \text{ 上})$$

と表わすと

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^2 v^i A_{ij}^{(k)} u^j, \quad (f, \hat{v})_{e_k} = \sum_{i=0}^2 v^i f_i^{(k)},$$

ただし

$$A_{ij}^{(k)} := \langle L_j, L_i \rangle_{e_k}, \quad f_i^{(k)} := (f, L_i)_{e_k}.$$

そこで

$$\mathbf{u}_k := \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_k := \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_k := \begin{pmatrix} f_0^{(k)} \\ f_1^{(k)} \\ f_2^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$A_k := \begin{pmatrix} A_{00}^{(k)} & A_{01}^{(k)} & A_{02}^{(k)} \\ A_{10}^{(k)} & A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ A_{20}^{(k)} & A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} \end{pmatrix}$$

とおくと、 $A_k$  は対称行列で、

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \mathbf{v}_k^T A_k \mathbf{u}_k, \quad (f, \hat{v})_{e_k} = \mathbf{v}_k^T \mathbf{f}_k.$$

**具体的な成分の計算**  $A_{ij}^{(k)} = \langle L_j, L_i \rangle_{e_k}$  の計算は (16) で済んでいる。 $f_i^{(k)} = (f, L_i)_{e_k}$  については、例えば

$$(f, L_i)_{e_k} := \left( \sum_{j=0}^2 f(N_j) L_j, L_i \right)_{e_k} = \sum_{j=0}^2 f(N_j) (L_j, L_i)_{e_k}.$$

のように近似することになれば、後は (15) を使って  $(L_j, L_i)_{e_k}$  を計算すればよい。実際、対称性から  $i = j$  か  $i \neq j$  で場合分けすれば良くて、

$$(L_j, L_i)_{e_k} = \begin{cases} \iint_{e_k} L_0^2 dx dy = 2|e_k| \frac{2!0!0!}{(2+0+0+2)!} = |e_k|/6 & (i = j \text{ のとき}), \\ \iint_{e_k} L_0 L_1 dx dy = 2|e_k| \frac{1!1!0!}{(1+1+0+2)!} = |e_k|/12 & (i \neq j \text{ のとき}). \end{cases}$$

これから

$$\begin{aligned} f_0^{(k)} &\doteq \frac{|e_k|}{12} (2f(N_0) + f(N_1) + f(N_2)), \\ f_1^{(k)} &\doteq \frac{|e_k|}{12} (f(N_0) + 2f(N_1) + f(N_2)), \\ f_2^{(k)} &\doteq \frac{|e_k|}{12} (f(N_0) + f(N_1) + 2f(N_2)). \end{aligned}$$

## 5.4 近似方程式の組み立て — 直接剛性法

前小節 (5.3) で与えたベクトル、行列を  $m$  次元に拡大する。まず、 $u_i := \hat{u}(P_i)$ ,  $v_i := \hat{v}(P_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) として、

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

とおく。

有限要素  $e_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N_e$ ) を一つ取って、しばらく固定する。 $e_k$  の節点  $N_0, N_1, N_2$  に対して、

$$N_0 = P_{i_{k,0}}, \quad N_1 = P_{i_{k,1}}, \quad N_2 = P_{i_{k,2}}$$

となる整数  $i_{k,0}, i_{k,1}, i_{k,2}$  を取る (これらを**全体節点番号**と呼ぶ)。

$\mathbf{f}_k^* \in \mathbb{R}^m$  を  $i_{k,0}$  成分 =  $f_0^{(k)}$ ,  $i_{k,1}$  成分 =  $f_1^{(k)}$ ,  $i_{k,2}$  成分 =  $f_2^{(k)}$  で、それ以外の成分はすべて 0 であるようなベクトルとする。例えば  $i_0^{(k)} < i_1^{(k)} < i_2^{(k)}$  ならば

$$\mathbf{f}_k^* = \begin{matrix} & 1 & & i_{k,0} & & i_{k,1} & & i_{k,2} & & m \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{f}_k^* = & (0 & \cdots & 0 & f_0^{(k)} & 0 \cdots 0 & f_1^{(k)} & 0 \cdots 0 & f_2^{(k)} & 0 \cdots 0)^T. \end{matrix}$$

このように定義すると、

$$(f, \hat{v})_{e_k} = \mathbf{v}^T \mathbf{f}_k^* \quad (k = 1, 2, \dots, N_e).$$

同様の考え方で、行列  $A_k^* = (a_{ij}^{(k)})$  を

$$\begin{aligned} a_{i_{k,0}i_{k,0}} &= A_{00}^{(k)}, & a_{i_{k,0}i_{k,1}} &= A_{01}^{(k)}, & a_{i_{k,0}i_{k,2}} &= A_{02}^{(k)}, \\ a_{i_{k,1}i_{k,0}} &= A_{10}^{(k)}, & a_{i_{k,1}i_{k,1}} &= A_{11}^{(k)}, & a_{i_{k,1}i_{k,2}} &= A_{12}^{(k)}, \\ a_{i_{k,2}i_{k,0}} &= A_{20}^{(k)}, & a_{i_{k,2}i_{k,1}} &= A_{21}^{(k)}, & a_{i_{k,2}i_{k,2}} &= A_{22}^{(k)}, \\ \text{それ以外} &= 0 \end{aligned}$$

で定める。例えば  $i_{k,0} < i_{k,1} < i_{k,2}$  ならば

$$A_k^* = \begin{pmatrix} i_{k,0} & i_{k,1} & i_{k,2} & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ A_{00}^{(k)} & A_{01}^{(k)} & A_{02}^{(k)} & \leftarrow i_{k,0} \\ A_{10}^{(k)} & A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & \leftarrow i_{k,1} \\ A_{20}^{(k)} & A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} & \leftarrow i_{k,2} \end{pmatrix}.$$

これを用いると

$$\langle \widehat{u}, \widehat{v} \rangle_{e_k} = \mathbf{v}^T A_k^* \mathbf{u} \quad (k = 1, 2, \dots, N_e).$$

ゆえに弱形式 (17) は

$$\sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{v}^T A_k^* \mathbf{u} = \sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{v}^T \mathbf{f}_k^*$$

すなわち

$$\mathbf{v}^T \left( \sum_{k=1}^{N_e} A_k^* \mathbf{u} - \sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{f}_k^* \right) = 0$$

と同値になる。

そこで

$$\mathbf{A}^* := \sum_{k=1}^{N_e} A_k^*, \quad \mathbf{f}^* := \sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{f}_k^*$$

とおけば

$$(18) \quad \mathbf{v}^T (\mathbf{A}^* \mathbf{u} - \mathbf{f}^*) = 0.$$

ここで  $\mathbf{v}$  は

$$Y := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m; v_i = 0 \quad (P_i \in \Gamma_1 \text{ なる } i) \right\}$$

の任意の元であるから、(18) は次と同値である。

$$\mathbf{A}^* \mathbf{u} - \mathbf{f} \in Y^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m; w_i = 0 \quad (P_i \notin \Gamma_1 \text{ なる } i) \right\}$$

すなわち

$$(19) \quad \mathbf{A}^{**} \mathbf{u} = \mathbf{f}^{**}.$$



ここで

$$\begin{aligned} A^{**} &:= \mathbf{A}^* \text{ の第 } i \text{ 行 } (P_i \in \Gamma_1 \text{ なる } i) \text{ を除いた行列,} \\ \mathbf{f}^{**} &:= \mathbf{f}^* \text{ の第 } i \text{ 成分 } (P_i \in \Gamma_1 \text{ なる } i) \text{ を除いた縦ベクトル.} \end{aligned}$$

ところで

$$u_i = g_1(P_i) \quad (P_i \in \Gamma_1 \text{ なる } i)$$

があるから、これを代入して消去できる。 $A^{**}$  を列ベクトルで

$$A^{**} = (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_m)$$

のように表示すると、(19) は

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i u_i = \mathbf{f}^{**}.$$

この左辺を

$$\sum_{P_i \in \Gamma_1 \text{ なる } i} \mathbf{a}_i u_i + \sum_{P_i \notin \Gamma_1 \text{ なる } i} \mathbf{a}_i u_i = \mathbf{f}^{**}$$

と分解して、移項すると

$$\sum_{P_i \notin \Gamma_1 \text{ なる } i} \mathbf{a}_i u_i = \mathbf{f}^{**} - \sum_{P_i \in \Gamma_1 \text{ なる } i} \mathbf{a}_i u_i.$$

ゆえに

$$\mathbf{A} \mathbf{u}^* = \mathbf{f},$$

ただし

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &:= \mathbf{u} \text{ の第 } i \text{ 成分 } (P_i \in \Gamma_1 \text{ なる } i) \text{ を除いた縦ベクトル,} \\ \mathbf{A} &:= A^{**} \text{ の第 } i \text{ 列 } (P_i \in \Gamma_1 \text{ なる } i) \text{ を除いた正方行列,} \\ \mathbf{f} &:= \mathbf{f}^{**} - \sum_{P_i \in \Gamma_1 \text{ なる } i} \mathbf{a}_i u_i. \end{aligned}$$

## 5.5 近似方程式の具体例

簡単な問題に対する有限要素法の近似方程式を導こう。

$$\begin{aligned} \Omega &= (0, 1) \times (0, 1), \\ \Gamma_1 &= \{(x, y); x = 0, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, y = 0\}, \\ \Gamma_2 &= \{(x, y); x = 1, 0 < y \leq 1\} \cup \{(x, y); 0 < x \leq 1, y = 1\}, \\ g_1 &\equiv 0, \quad g_2 \equiv 0, \quad f \equiv \text{定数関数 } \bar{f}. \end{aligned}$$

すなわち

$$-\Delta u = \bar{f} \quad (\text{in } \Omega), \quad u = 0 \quad \text{on } \Gamma_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{on } \Gamma_2.$$

この領域を図 (4) のように 3 角形要素によって要素分割する。有限要素は次の二つのタイプがある (タイプ I, II と呼ぶことにする)。各々に図 (5) のように局所節点番号をつける。

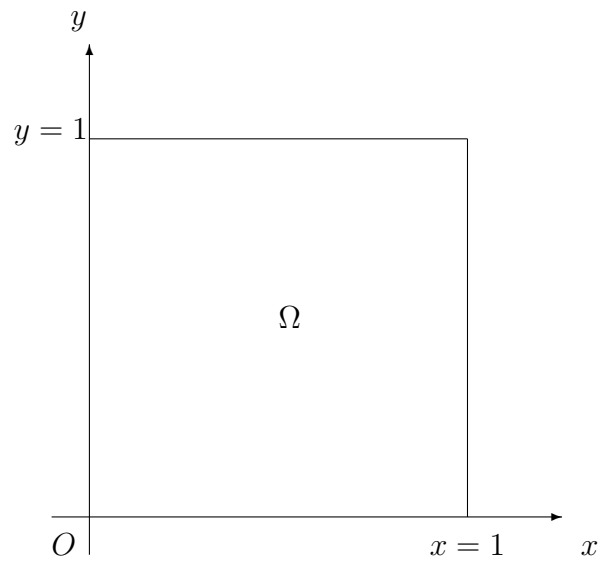


图 3: 領域  $\Omega$

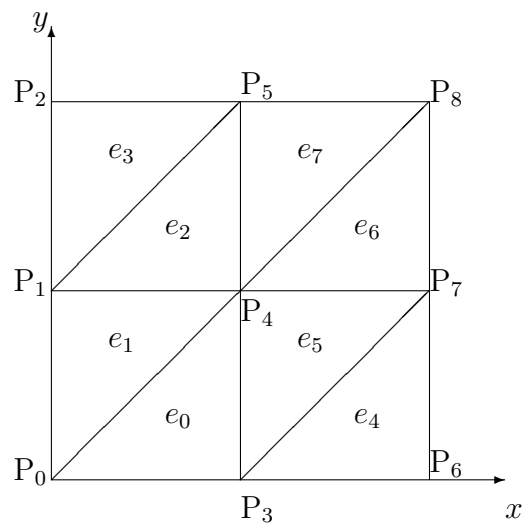


图 4: 要素分割

タイプ I  $e_0, e_2, e_4, e_6$ .

タイプ II  $e_1, e_3, e_5, e_7$ .

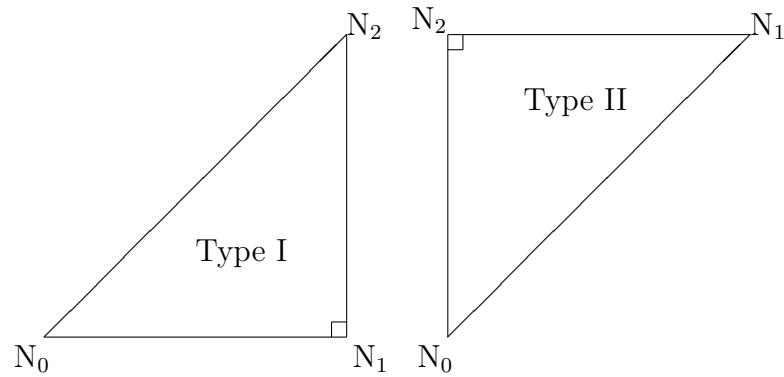


図 5: 二つのタイプの有限要素と局所節点番号

タイプが同じならば、要素係数行列  $A_k$ , 要素自由項ベクトル  $f_k$  が等しいことはすぐ分かる。それぞれ  $A_I, A_{II}, f_I, f_{II}$  で表すことにする。タイプ I については

$$D = h^2, \quad S = \frac{h^2}{2},$$

$$A_I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_I = \frac{\bar{f}h^2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

タイプ II については

$$D = h^2, \quad S = \frac{h^2}{2},$$

$$A_{II} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f_{II} = \frac{\bar{f}h^2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

これらから、全体的な近似方程式を作ろう。

そのために局所的な節点番号と、全体的な節点番号の対応づけが必要である。そこで以下のような対応表を用意する。

要素	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
要素タイプ	I	II	I	II	I	II	I	II
$N_0$ の全体節点番号	0	0	1	1	3	3	4	4
$N_1$ の全体節点番号	3	4	4	5	6	7	7	8
$N_2$ の全体節点番号	4	1	5	2	7	4	8	5

これから Galerkin 法の弱形式は

$$\mathbf{v}^T \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \mathbf{v}^T \frac{\bar{f}h^2}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

for

$$\forall \mathbf{v} \in \{(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8)^T \in \mathbb{R}^9; v_0 = v_1 = v_2 = v_3 = v_6 = 0\}.$$

そこで基本境界条件の処理を行なうと

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \frac{\bar{f}h^2}{6} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1/2 \\ -1 & 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f}h^2 \\ \bar{h}^2/2 \\ \bar{f}h^2/2 \\ \bar{f}h^2/3 \end{pmatrix}.$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(P_0) \\ g_1(P_1) \\ g_1(P_2) \\ g_1(P_3) \\ \bar{f}h^2 \\ \bar{f}h^2/2 \\ g_1(P_6) \\ \bar{f}h^2/2 \\ \bar{f}h^2/3 \end{pmatrix}.$$

## 5.6 方程式を立てるのに必要なもの

上の例では

- 節点の表 (節点の全体節点番号と座標)。

- $\Gamma_1$  上にある (Dirichlet 境界条件を課す) 節点の全体節点番号 (順序を考えた組)。
- 各有限要素を構成する節点の節点番号。

が必要になった。

この例では  $g_1 \equiv 0, g_2 \equiv 0$  であったが、一般には次のものも必要になる。

- $\Gamma_2$  上にある (Neumann 境界条件を課す) 節点の全体節点番号と、そこにおける Neumann データ  $g_2$ 。
- $\Gamma_1$  における Dirichlet データ。

## 5.7 サンプルプログラム

これは別資料として紹介する。

## A 変分法メモ

近代的な解析学の重要なルーツとも言える変分法  
(有限要素法の心臓部分とも言える) は講義されることが少ない!

**変分法**とは、変分問題の解法のこと。

**変分問題**とは、関数を変数とする実数値関数 (はんかんすう汎関数, functional) の最小 (or 極値) 問題である。

(言い換えると関数空間の部分集合を定義域とする関数)

**等周問題**<sup>15</sup>という古い問題もあるが<sup>16</sup>、**最短降下線** (Brachistochrone) がスタートと考えられる。

### A.1 Johann Bernoulli (1667–1748) の最短降下線の問題

ベルヌーイってどんな人?

**例 A.1** 一様な重力場内の二定点  $P, Q$  ( $P$  は  $Q$  よりも高いところにある) が与えられた時、 $P$  から  $Q$  に至る曲線に拘束されて、重力に従って移動する質点の運動 (重力以外の摩擦力、空気抵抗は無視する) を考える。 $P$  が原点になるように座標軸を取り、 $Q = (a_1, b_1)$  とし、経路 (曲線) を  $u = u(x)$  とすると、所要時間は、

$$(20) \quad I[u] := \int_0^{a_1} \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{\sqrt{-2gu(x)}} dx \quad (g \text{ は重力加速度})$$

のような経路  $u$  の関数であるが、それを最小とするのは、どのような経路か?

ベルヌーイ兄弟、Newton, Euler, ... 色々な解き方をした。これについては、S. P. ネルセット, G. ヴァンナー, E. ハイラー, 「常微分方程式の数値解法 I 基礎編」, シュプリンガー・ジャパン (2007) に少し詳しい紹介がある。

現代の観点からは、変分法の定跡である **Euler-Lagrange 方程式** に帰着させる (Lagrange による) 解法が重要である。

**(20) の導出** 曲線  $y = u(x)$  上の任意の点  $(x, y)$  における速さを  $v$  とすると、

$$(21) \quad v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}\right)^2 = [1 + u'(x)^2] \left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

一方、エネルギー保存則から

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgu(x) = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + mg \cdot 0$$

<sup>15</sup> 周の長さが与えられた領域のうち、面積が最大となるものは何か? — 円であることが予想されるが、証明は?

<sup>16</sup> 調べてみることを勧める。レポート歓迎。

が成り立つから

$$(22) \quad v = \sqrt{-2gu(x)}.$$

ゆえに (21), (22) から

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v}{\sqrt{1+u'(x)^2}} = \frac{\sqrt{-2gu(x)}}{\sqrt{1+u'(x)^2}}$$

所要時間は

$$I[u] := \int_0^{a_1} \frac{dt}{dx} dx = \int_0^{a_1} \frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{\sqrt{-2gu(x)}} dx. \blacksquare$$

この問題の解を求めるため、少し一般化して考える。ここで

$$f(x, y, z) := \frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{-2gy}}, \quad a := 0, \quad b := a_1$$

とおくと、

$$I[u] = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx.$$

上の  $I[u]$  の Euler-Lagrange 方程式は

$$(23) \quad \frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{2\sqrt{2g}\sqrt{-u(x)}^3} - \frac{d}{dx} \left( \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}\sqrt{-2gu(x)}} \right) = 0$$

である。実際

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sqrt{1+z^2}}{2\sqrt{2g}(\sqrt{-y})^3}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}\sqrt{-2gy}}$$

であるから。

(23) を整理すると

$$\frac{2u''(x)}{1+u'(x)^2} + \frac{1}{u(x)} = 0.$$

$u'$  をかけて積分すると、

$$\log(1+u'(x)^2) + \log|u(x)| = \log C \quad (C \text{ は正の任意定数}).$$

$u(x) \leq 0$  に注意して整理すると

$$(1+(u')^2)u = -C.$$

$u$  について解くと、変数分離型の微分方程式

$$(24) \quad u' = -\sqrt{\frac{u+C}{-u}}.$$

が得られる。後はこれを解くだけである (実はちよつと難しい<sup>17</sup>)。

<sup>17</sup>普通に変数分離型微分方程式のパターンで計算を進めても、( $u$  の複雑な式) =  $x$  となり、それがサイクロイドであることは分り辛い。

$$u = \frac{C}{2} (\cos \theta - 1)$$

という変数変換を行うと、

$$u + C = \frac{C}{2} (1 + \cos \theta), \quad \frac{u + C}{-u} = \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} = \tan^2 \frac{\theta}{2}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = -\frac{C}{2} \sin \theta \frac{d\theta}{dx}$$

であるから、微分方程式に代入して、

$$-\frac{C}{2} \sin \theta \frac{d\theta}{dx} = -\sqrt{\tan^2 \frac{\theta}{2}}.$$

ゆえに

$$\frac{dx}{d\theta} = C \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{C}{2} (1 + \cos \theta).$$

積分して

$$x = \frac{C}{2} (\theta + \sin \theta) + D \quad (D \text{ は積分定数}).$$

(はてね) 結果のみ示すと、

$$x = \frac{C}{2} (\theta + \sin \theta) + D, \quad u = \frac{C}{2} (\cos \theta - 1) \quad (C, D \text{ は積分定数}).$$

$(x, u) = (0, 0)$  を通ることから、 $\exists \theta$  s.t.

$$0 = \frac{C}{2} (\theta + \sin \theta) + D, \quad 0 = \frac{C}{2} (\cos \theta - 1).$$

これから  $D = 0$ . ゆえに

$$(25) \quad x = \frac{C}{2} (\theta + \sin \theta), \quad u = \frac{C}{2} (\cos \theta - 1).$$

これは軌跡が**サイクロイド**となることを表している。

**レポート課題** 以上の計算の細部を遂行し、 $(Q(a_1, b_1))$  を色々変えながら) 軌跡の具体形をコンピュータを利用して描け。

## A.2 Euler-Lagrange 方程式

3変数関数  $f = f(x, y, z)$  と、 $A, B$  が与えられているとき、 $C^1$  級の  $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  で

$$(26) \quad u(a) = A, \quad u(b) = B,$$

を満たすもののうちで、

$$(27) \quad I[u] := \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx$$



を最小にするものは

$$(28) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) \right) = 0$$

を満たす。

**証明**  $u$  が  $I$  を最小にする関数とする。

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

を満たす任意の関数  $\varphi$  を取って、

$$F(t) := I[u + t\varphi] \quad (t \in \mathbb{R})$$

とおく。  $F$  は  $t = 0$  で最小になるので  $F'(0) = 0$  となるであろう。

$$F(t) = \int_a^b f(x, u(x) + t\varphi(x), u'(x) + t\varphi'(x)) dx$$

であるから、積分記号下の微分によって

$$F'(t) = \int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x) + t\varphi(x), u'(x) + t\varphi'(x)) \varphi(x) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x) + t\varphi(x), u'(x) + t\varphi'(x)) \varphi'(x) \right] dx.$$

ゆえに

$$F'(0) = \int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x), u'(x)) \varphi(x) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) \varphi'(x) \right] dx.$$

第2項について部分積分を実行して

$$\begin{aligned} F'(0) &= \int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) \right) \right] \varphi(x) dx + \left[ \frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) \varphi(x) \right]_a^b \\ &= \int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) \right) \right] \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

これが任意の  $\varphi$  について 0 となることから、変分法の基本補題によって

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) \right) = 0. \blacksquare$$

(28) は  $u$  についての微分方程式である。これを汎関数  $I$  (あるいは変分問題  $\min_u I[u]$ ) に対する **Euler 方程式** あるいは **Euler-Lagrange 方程式** と呼ぶ。

### A.3 最小作用の原理

(これは講義では説明する時間的余裕がないだろう。昔だったら<sup>18</sup>、理系の学生にとって「常識的」事項であったし、現在でも学ぶことになる可能性は低くないので、ちら見するだけでも価値があると考え、ここに書いておく。)

質点の運動を考える (デカルト座標を  $x_1, \dots, x_n$  とする)。力は保存力で、位置エネルギー  $U$  は時刻  $t$  によらず  $x_1, \dots, x_n$  のみによると仮定する:  $U = U(x_1, \dots, x_n)$ . 運動量  $p_j = m\dot{x}_j$  を用いると、Newton の運動方程式は

$$(29) \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, n).$$

運動エネルギー

$$K(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) := \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m \dot{x}_j^2$$

を用いると

$$p_j = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_j}$$

となることに注意する。

一般座標  $q = (q_1, \dots, q_n)$  を導入する。

$$\begin{cases} x_1 = x_1(q; t) = x_1(q_1, \dots, q_n; t) \\ \vdots \\ x_n = x_n(q; t) = x_n(q_1, \dots, q_n; t). \end{cases}$$

運動方程式 (29) は、

$$(30) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} \right) = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial K}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, n)$$

と書き直される (途中経過略)。

ここで Lagrange 関数 (Lagrangian function) と呼ばれる

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) := K(q, \dot{q}, t) - U(q, t)$$

を導入すると、(30) は、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, n)$$

<sup>18</sup>現代の数学を構成する成分のルーツの多くは物理学にある。もちろん一度数学になってしまえば、数学の中で定義出来て議論はすべて数学的に行うことが出来る。物理を学ぶことは数学を理解するための必要条件ではない。また物理から生まれた数学の応用は物理に限定される、ということもない (例えば Fourier 解析は、熱方程式や波動方程式など、物理学に現れる微分方程式を解くために生まれたが、現代では音声、画像処理への応用が盛んで、微分方程式をほとんど使わない (学ばない) 分野の学生が Fourier 解析を学んでいる)。要するに、義務的に物理学を学ぶ必要はない。しかし、興味が生じたら、あるいは必要が生じたら、ちゅうちょなく物理学を学ぶ気持ちを持っていて欲しい。

に書き直される (この確認は簡単である)。これを **Lagrange の運動方程式** と呼ぶ。これは **作用** (action) あるいは **作用積分** (action integral) と呼ばれる

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

の Euler-Lagrange 方程式に他ならない。つまり、運動は作用積分を最小にするような軌道に沿う、ということになる。これを **最小作用の原理** (action principle) という。

$L$  には直観的な物理的意味はない ( $K - U$  でなく  $K + U$  ならばエネルギーだが、そうではない)。

## A.4 Dirichlet 原理

Laplace 方程式に対する **Dirichlet の原理** 「Dirichlet 境界条件  $u = \psi$  (on  $\partial\Omega$ ) を満たす  $u$  のうちで、Dirichlet 積分

$$I[u] := \iint_{\Omega} (u_x(x, y)^2 + u_y(x, y)^2) dx dy$$

を最小にするものは、Laplace 方程式  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  を満たす」も、以下で見るように、上と同じ原理 (2.1, 2.2 では関数の独立変数が  $t$  だけ、1 変数であったが、今度は独立変数が  $x, y$  の2つなので、様子がかなり異なるが) によると考えられる。

### A.4.1 汎関数 $I$ を最小にする関数は、Laplace 方程式を満すことの確認

$u = u_0$  が  $I$  を最小にすると仮定する。任意の  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  に対して、 $u_0 + tv$  は

$$u_0 + tv = \psi \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

を満たすので、 $I$  の定義域に属している。 $u_0$  が最小値を与えるという仮定から、

$$I[u_0 + tv] \geq I[u_0].$$

これは  $f(t) := I[u_0 + tv]$  とおくと、 $f$  が  $t = 0$  で最小値を取る、と言い替えられる。ところが  $f$  は

$$\begin{aligned} f(t) &= \iint_{\Omega} \nabla(u_0 + tv) \cdot \nabla(u_0 + tv) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (|\nabla u_0|^2 + 2t \nabla u_0 \cdot \nabla v + t^2 |\nabla v|^2) dx dy \\ &= I[u_0] + 2t \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx + t^2 I[v] \end{aligned}$$

のような 2 次関数であるから、これが 0 で最小になるには、1 次の係数が 0 である<sup>19</sup>必要がある:

$$\iint_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx dy = 0.$$

<sup>19</sup>あるいは、 $f'(0) = 0$  と言っても同じこと。

これを部分積分して (あるいは Green の定理を使って)

$$\iint_{\Omega} \Delta u_0 v \, dx \, dy = 0.$$

$v$  が任意であることから、(次項で紹介する**変分法の基本補題**というのが使えて)

$$\Delta u_0 = 0 \quad (\text{in } \Omega). \quad \blacksquare$$

## A.5 変分法の基本補題

「任意の」(実際には「何かの条件を満たすすべての」) 関数  $\varphi$  について

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x) \, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0 \quad \text{in } \Omega$$

が成り立つ、という形の命題を「**変分法の基本補題**」(fundamental lemma of calculus of variations) という。

**命題 A.2 (変分法の基本補題)**  $\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は局所可積分関数で

$$(\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) \, dx = 0$$

を満たすならば

$$f = 0 \quad (\text{a.e. on } \Omega).$$

## A.6 変分法の“直接法”

最小問題が目的とは限らない

Dirichlet の原理は、G. F. B. Riemann (1826–1866) による (関数論で有名な) **写像定理** (1851 年) の証明に使われたが、Riemann は  $I$  の最小値の存在を厳密に示すことができず (下限の存在は明らかだが、下限が最小値であることは明らかでない — Weierstrass の指摘)、D. Hilbert (1862–1943) によって 1900 年に解決されるまで、ほぼ 50 年近い年月がかかった。

最短降下線の場合には、最短降下線という変分問題を解くために微分方程式の問題に変形し、その微分方程式を解くことによって解を得たが、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の場合には、偏微分方程式の問題を解くために変分問題に変形し、その変分問題を“直接<sup>20</sup>”解く (解の存在を示す) ことによって解を得た。この論法を変分法の**直接法**と呼ぶ。

議論の方向が最短降下線のような“従来の”変分法とは逆であることに注意しよう。こういうことは、数学のあちこちで現われる。一つの問題が一見違う形の問題と同等であるということが比較的一般的に分かっていて、どちらの問題が解きやすいかは、個々の問題による、という状況がある。

<sup>20</sup>変分法の問題なので、Euler-Lagrange 方程式を作ると、最初の問題が出て来て、堂々巡りになってしまう。

## A.7 おまけ: 極小曲面

空間内に与えられた閉曲線  $\Gamma$  に石鹸膜を張ったとき、膜の形はどうか? — 表面張力が働くので、面積を最小にするような曲面 (**極小曲面**, minimal surface) になる。

局所的には、適当な座標系を取ると微分方程式

$$(31) \quad (1 + u_x^2) u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2) u_{xx} = 0$$

の解  $u$  のグラフとなる。この微分方程式は非線形の偏微分方程式で簡単には解けない。

**レポート課題** 対応する汎関数と、その Euler-Lagrange 方程式として (31) が導出される過程を書け。代表的な極小曲面 (これについては文献を探して調べよ) を二三選び、(31) を満たすことを確認せよ。さらにコンピューターで図示せよ。

## B Lax-Milgram の定理

Poisson 方程式の境界値問題の弱解の一意的な存在の証明は、Lax-Milgram の定理を用いるのが定番のやり方である。その証明は省略するが (Brezis [3], 藤田・黒田・伊藤 [4], 菊地 [5] などを見よ)、定理だけは紹介しておこう。

**定理 B.1 (Lax-Milgram の定理)**  $H$  を Hilbert 空間、 $a$  を  $H$  上の双線形連続強圧的形式、 $\varphi \in H'$  とするとき、以下の (i), (ii) が成り立つ。

(i) 次の問題 (W) は一意な解を持つ。

(W) Find  $u \in H$  s.t.

$$(32) \quad a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \quad (v \in H)$$

(ii) 特に  $a$  が対称ならば、(W) の解  $u$  は次の問題 (V) の解としても、特徴づけられる。

(V) Find  $u \in H$  s.t.

$$(33) \quad \frac{1}{2} a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

つまり  $u \in H$  に対して (32) と (33) は同値である。当然、問題 (V) も一意に解ける。

### 注意 B.2

$$F(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle$$

とおくと  $F'(u) = 0$  は (33) で表される。

**定理 B.3 (Stampacchia の定理)**  $H$  を Hilbert 空間、 $K$  を  $H$  の空でない凸閉集合、 $a$  を  $H$  上の双線形連続強圧的形式、 $\varphi \in H'$  とするとき、以下の (i), (ii) が成り立つ。

(i) 次の問題 (W) は一意な解を持つ。

( $W_S$ ) Find  $u \in K$  s.t.

$$(34) \quad a(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle \quad (v \in K)$$

(ii) 特に  $a$  が対称ならば、( $W_S$ ) の解  $u$  は次の問題 ( $V_S$ ) の解としても、特徴づけられる。

( $V_S$ ) Find  $u \in K$  s.t.

$$(35) \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

つまり  $u \in K$  に対して (34) と (35) は同値である。当然、問題 ( $V_S$ ) も一意に解ける。

#### 注意 B.4

$$F(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle$$

とおくと  $F'(u) = 0$  は (33) で表される。

**系 B.5**  $K = u_0 + V = \{u_0 + v; v \in V\}$  ( $u_0 \in H, V: H$  の閉部分空間) の場合

$$a(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle \quad (v \in K) \iff a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \quad (v \in V).$$

## C 参考になる情報

桂田研では学部4年生にしばしば有限要素法の課題を与えるので、いくつかレポートが残っている。

『桂田研卒業レポート』

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/report/>

なお次の文書 (桂田研のレポートではないが) も参考となる。

1. 工藤 丈征, 有限要素法による定常 Navier-Stokes 方程式の数値解析プログラム (Ver.1) 取り扱い説明書 (1995).

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/report/kudou.pdf>

## 参考文献

- [1] 菊地文雄：有限要素法概説, サイエンス社 (1980), 新訂版 1999.
- [2] 加藤敏夫：変分法, 寺沢貫一（編）, 自然科学者のための数学概論 — 応用編 —, C編, 岩波書店 (1960), 岩波書店の本なので、時々入手しにくいことがあります。僕の学生は相談に来て下さい。
- [3] Brezis, H.: 関数解析, 産業図書 (1988), (藤田 宏, 小西 芳雄 訳), 原著は版を改めて、より内容豊富になっています。
- [4] 藤田宏, 黒田成俊<sup>しげとし</sup>, 伊藤清三：関数解析, 岩波書店 (1991), 岩波講座 基礎数学 (1978年) の書籍化.
- [5] 菊地文雄：有限要素法の数理, 培風館 (1994), 長いこと版元在庫切れ状態です。何冊か持っているの、僕の学生で読みたい人は相談に来て下さい。