

固有値問題に対する冪乗法の周辺

桂田 祐史

2018 年 8 月 22 日

1 今回の課題

今回は固有値問題を取り扱うための冪乗法とその周辺の種々の手法を実験してもらおう。実験に用いる行列は小さなもので良い。自分で選ぶのが面倒なら、次の行列を使ってよい¹。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 選んだ行列のサイズが小さい場合は、固有多項式を計算して固有値に関する情報を調べよ²。
- 冪乗法により絶対値最大の固有値とそれに属する固有ベクトルを求めよ。収束の速さを調べよ。固有値を反復ベクトルの成分の比として計算した場合と、Rayleigh 商で計算した場合とで、収束の速さに違いが出るか？
- 逆反復法により (連立一次方程式を解くには LU 分解を使え)、絶対値最小の固有値とそれに属する固有ベクトルを求めよ。
- シフト法の実験をせよ。すなわち絶対値最大、最小の固有値以外の固有値を見い出せ。(例えば、上に掲げた行列 A に対しては 0.6 に近い固有値を探してみよ。)

今回の課題は倍精度を使って計算してみること。

ちなみに A の固有値は

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 5.048917339522305313522214407023370089866\dots, \\ \lambda_2 &= 0.6431041321077905561056004899786994619201\dots, \\ \lambda_3 &= 0.3079785283699041303721851029979308815479\dots\end{aligned}$$

¹この行列自体が一松信「数値解析」朝倉書店(1982)から採ったものである。

²必要があれば Mathematica 等を利用せよ。その場合のヒント: 行列式を計算する Det, 固有値を計算する Eigenvalues, 方程式を解く Solve, 方程式の解の近似値を求める FindRoot, 関数のグラフを描く Plot 等の手続きがある。

2 Mathematica の使用例

```
yomiuri% math
Mathematica 2.0 for SPARC
Copyright 1988-91 Wolfram Research, Inc.
-- X11 windows graphics initialized --

In[1]:= A={{1,1,1},{1,2,2},{1,2,3}}

Out[1]= {{1, 1, 1}, {1, 2, 2}, {1, 2, 3}}

In[2]:= Eigenvalues[A]
        中略 (興味がある人は自分でやってみよう)

In[3]:= N[%,40]

Out[3]= {5.048917339522305313522214407023369723596 + 0. I,
> 0.307978528369904130372185102997930859803 + 0. I,
> 0.643104132107790556105600489978699416601 + 0. I}

In[4]:= NA=N[A,50]

Out[4]= {{1., 1., 1.}, {1., 2., 2.}, {1., 2., 3.}}

In[5]:= Eigenvalues[NA]

Out[5]= {5.0489173395223053135222144070233697235963877860565,
> 0.64310413210779055610560048997869941660087281326538,
> 0.30797852836990413037218510299793085980273940067811}

In[6]:= Eigenvectors[NA]

Out[6]= {{0.32798527760568176779603202500454990640870532112133,
> 0.59100904850610352545794571799937980844713881955014,
> 0.73697622909957824233808630700517009796156650157119},
> {0.73697622909957824233808630700517009796156650157119,
> 0.32798527760568176779603202500454990640870532112133,
> -0.59100904850610352545794571799937980844713881955014},
> {0.59100904850610352545794571799937980844713881955014,
> -0.73697622909957824233808630700517009796156650157119,
> 0.32798527760568176779603202500454990640870532112133}}

In[7]:= Quit
yomiuri%
```