

教科書 p.132 問1の (1), (4), (7), (10), (13) を解け。

(1) $y' + \frac{1}{x}y = 0$ より、 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$. これから $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$. 積分を実行して、 $\log|y| = -\log|x| + \log C$ ($\log C$ は積分定数). 移項して $\log|xy| = \log C$. ゆえに $|xy| = C$. 絶対値を外して $xy = \pm C$. $\pm C$ を新しく C と書き直して $y = \frac{C}{x}$ (C は任意定数).

(4) $x^3y' + y^2 = 0$ より、 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x^3}$. これから $\int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{dx}{x^3}$. 積分を実行して、 $-\frac{1}{y} = \frac{1}{2x^2} + C$ (C は積分定数). これを y について解くと $y = -\frac{2x^2}{2Cx^2 + 1}$. これを解として良いが、 $-2C$ を C と置き換えると、教科書の答 $\frac{2x^2}{Cx^2 - 1}$ に一致する。

(7) $x^2y' + y^2 = 0$ より、 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x^2}$. これから $\int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{dx}{x^2}$. 積分を実行して、 $-\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + C$ (C は積分定数). これを y について解くと $y = \frac{x}{-1 - Cx}$. これを解として良いが、 C を $-C$ に置き換えると、教科書の答 $\frac{x}{Cx - 1}$ に一致する。

(10) $y' + ay^2 = 0$ より、 $\frac{dy}{dx} = -ay^2$. これから $\int \frac{dy}{y^2} = -\int a dx$. 積分を実行して、 $-\frac{1}{y} = -ax + C$ (C は積分定数). これを y について解くと $y = \frac{1}{ax - C}$. これを解として良いが、 C を $-C$ に置き換えると、教科書の答 $\frac{1}{ax + C}$ に一致する。

(13) $y' \tan x = \cot y$ より、 $\tan y dy = \cot x dx$. これから $\int \tan y dy = \int \cot x dx$. 積分を実行して、 $-\log|\cos y| = \log|\sin x| + C$ (C は積分定数). 移項して $\log|\cos y \sin x| = -C$. ゆえに $|\cos y \sin x| = e^{-C}$. 絶対値を外して $\cos y \sin x = \pm e^{-C}$. $\pm e^{-C}$ を新しく C と書き直して $\cos y \sin x = C$ (C は任意定数). 教科書の答のようにここで止めてもよしとする。 y について解くと、 $y = \cos^{-1}\left(\frac{C}{\sin x}\right)$.

教科書の 5.2 節の問の解答訂正 1. (8) $y^2 = \frac{5x^2}{Cx^5 - 2}$ ではなく¹、 $y^2 = \frac{5x^5}{Cx^5 - 2}$.

(15) $y = \frac{b(C + e^{2abx})}{C - e^{2abx}}$ ではなく、 $y = -\frac{b(C + e^{2abx})}{C - e^{2abx}}$. (30) $y^2 = (\sqrt{1+x^2} + C) - 1$ ではなく、 $y^2 = (\sqrt{1+x^2} + C)^2 - 1$. 他にも特異解が落ちたりしていますが、そこらへんは目をつぶってください。問 2 は間違いがないようです。

¹前回授業中に $y^2 = \frac{5}{C - 2x^{-5}}$ としたけれど、 $y^2 = \frac{5x^5}{Cx^5 - 2}$ に書き換えた方が見易く、またどういう誤植をしたのか良く分かる。