微分方程式

非同次方程式の解法の解説補足

桂田 祐史

2007 年 12 月 20 日, 訂正 2008 年 1 月 10 日

(**連絡事項** 演習の解説のプリントの準備が遅れていてごめんなさい。年明けに配りますが、`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/ode/` に掲載する予定です。冬休み中に復習する場合、チェックしてみてください。)

前回の説明は、天下り過ぎて良く分からない、という訴えが多かったので、大いに反省して、逆方向から攻めてみます。難しいこともあるが、簡単な場合もある（本当はそれが多い)、と思ってもらうのが今日の目標。

1 非同次方程式の解法 (1) 特解を求めれば一般解が求める

線形微分方程式の一般解というのは、その微分方程式のすべての解を表す式ですが、特解というのは、1 つの解 (何でもよい) のことを指します。定理 5.33 から、次の解法の手順が得られます。

定数 p, q と、関数 $f(x)$ は与えられているとする。

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{2}$$

を解くには、まず次の (i), (ii) を行う。

(i) $z'' + pz' + qz = 0$ の一般解を求める (特性根の方法 (§5.5) で解ける)。

(ii) $u'' + pu' + qu = f(x)$ の特解を求める (求め方は後述)。

すると $y := z + u$ は (2) の一般解になる。

2 非同次方程式の解法 (2) とにかく一つ特解を求めるための未定係数法

次の場合は、以下に説明する未定係数法で特解が求まる。

(a) $f(x) =$ 多項式 $\times e^{\alpha x}$ の場合 ($f(x) =$ 多項式 の場合もこの特別な場合)、

(b) $f(x) =$ 多項式 $\times e^{ax} \cos bx$ または $f(x) =$ 多項式 $\times e^{ax} \sin bx$ の場合

☆ $u'' + pu' + qu = f(x)$ の特解 u は、基本的には、$f(x)$ と同じような形の解で求まる。

$f(x) = e^x + \cos x + x^2$ のような、これらの和になっている場合は、$f_1(x) = e^x$ の特解 u_1, $f_2(x) = \cos x$ の特解 u_2, $f_3(x) = x^2$ の特解 u_3 を求めて、それらを足した $u := u_1 + u_2 + u_3$ を作ればよい。

2.1 $f(x) =$ 多項式 $\times e^{\alpha x}$ の特解の求め方

- $f(x)$ が多項式ならば、u は多項式で求まる。$f(x)$ が n 次式ならば u も n 次式 — と言いたいが、これはつねに正しい訳ではない。次数を n より大きくしないと求まらないことがある。詳しくは $u = x^m \times$ 同じ次数の多項式 の形になる (m はある 0 以上の整数)。
  試しに、(i) $y'' - 3y' + 2y = x + 1$, (ii) $y'' + y' = x + 1$, (iii) $y'' = x + 1$ を解いてみよう。$u = ax + b$ (a, b は未定係数) と置いて代入すると…
- $f(x)$ が $e^{\alpha x}$ ならば、u も $e^{\alpha x}$ の定数倍で求まる— と言いたいが、これはつねに正しい訳ではない。$u = Ax^m e^{\alpha x}$ とする必要があるときもある (m はある 0 以上の整数)。
  試しに (iv) $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$, (v) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$, (vi) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ を解いてみよう。$u = Ae^{-x}$ と置いて代入すると…
- 一般に $f(x) =$ 多項式 $\times e^{\alpha x}$ の特解は $u = x^m \times$ 同じ次数の多項式 $\times e^{\alpha x}$ の形で求まる (m はある 0 以上の整数)。

2.2 $f(x) =$ 多項式 $\times e^{ax} \cos bx$ (または $\sin bx$)

以下 $\cos bx$ で話をするが、$\sin bx$ でも同様である。

- $f(x)$ が $\cos bx$ ならば、u は $u = A\cos bx + B\sin bx$ で求まる— と言いたいが、これもつねに正しい訳ではない。
  試しに (vii) $y'' - 3y' + 2y = \cos x$, (viii) $y'' + y = \cos x$ を解いてみよう。$u = a\cos bx + a\sin bx$ と置いて代入すると…
- いよいよ一番面倒くさい形。$f(x) =$ 多項式$\times e^{ax} \cos bx$ ならば、$f(x) = x^m \times$同じ次数の多項式$\times e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$

2.3 m の正体

先週の授業を聴いた人には、記憶に残っているはずだが、m が 0 であるかどうかは、**2.1** の場合には α が特性方程式の根になっているか ($e^{\alpha x}$ が同次方程式の解になっているか)、**2.2** の場合には $a + ib$ が特性方程式の根になっているか ($e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$ が同次方程式の解になっているか)、で判定できる。より詳しくは、特性根の何重根になっているか、である。この部分が面倒なので難しく感じてしまった人が多いが、大抵の問題はずっと簡単なので心配しすぎないように。

念のため 授業中に説明するが、このプリントだけ見ている人に。(ii) は $u = (ax + b)x$ とおく。(iii) は $u = (ax + b)x^2$ とおく。(v) は $u = Axe^{-x}$ とおく。(vi) は $u = Ax^2e^{-x}$ とおく。(vii) は $u = x(a\cos x + b\sin x)$ とおく。