数理リテラシー 練習問題 No. 7　(2024 年 6 月 12 日出題, 解答は週末に公開)

__年__ 組____番　氏名_____________　　(解答は何ページでも可. 1 つの PDF にして提出)

(1) 各自然数 n に対して集合 A_n が与えられているとき、$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ は何か。定義を記せ。

(2) 任意の自然数 n に対して $A_n := \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{n} < x \leq 2n\right\}$ とする。

(b) A_1, A_2, A_3 を数直線上に表示せよ。

(c) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ と $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ を求めよ。余裕があれば、証明を試みること。

次のページに解答を書いておきます。

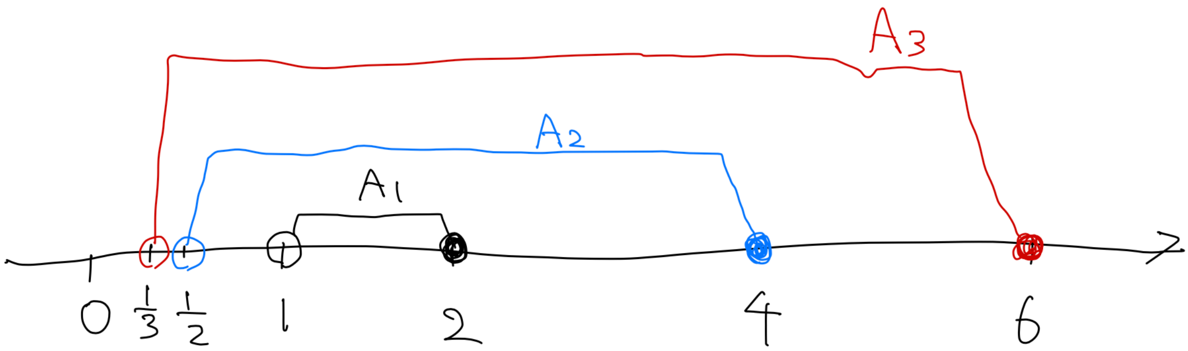
問 7 解説

(1)

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N})\ x \in A_n\}, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N})\ x \in A_n\}.$$

呼び方も書いておくべきか (問題文に書かなかったけれど)。それぞれ、集合族 $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の合併 (合併集合, 和集合)、共通部分 (積集合, 交わり) とよびます。

(2) (a) ちょっと雑な図ですが



(b)

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}.$$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$ **の証明**　実は $A_n \subset A_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立ち、こういう場合はつねに $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$ となります。それを知っていると、$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$. ■

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$ **の証明**　まず左辺 $\subset$ 右辺の証明: x を $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ の任意の要素とすると、ある n が存在して、$x \in A_n$. すなわち $\frac{1}{n} < x < n$. このとき $x > 0$ であるから $x \in \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$. ゆえに $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$.

右辺 $\subset$ 左辺の証明: x を $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$ の任意の要素とすると、$x > 0$.

- $x \geq 1$ の場合、x の整数部分を k とすると、$1 \leq x < k+1$. ゆえに $x \in A_{k+1}$. $n = k+1$ とおくと、n は自然数で、$x \in A_n$. ゆえに $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
- $x < 1$ の場合、$0 < x < 1$. 十分大きな自然数 n を取ると、$\frac{1}{n} < x$ となるので、$x \in A_n$. ゆえに $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

いずれの場合も $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. ゆえに $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. ■