複素関数・同演習 宿題 No. 1 (2024 年 9 月 25 出題, 10 月 1 日 13:30 までに Oh-o! Meiji で提出)

__年__ 組____番 氏名______________ (2 ページ目以降は、裏面・レポート用紙、何でも可。)

問 1 (1) $z_1 = 3 - 3i$, $z_2 = 2 + 4i$ とするとき、$z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $|z_1|$, $\mathrm{Re}\, z_1$, $\mathrm{Im}\, z_1$, $\overline{z_1}$ を求めよ (結果が実数でない限り、$x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ の形に表せ)。

(2) $z^2 = 3 + 2i$ を満たす複素数 z を求めよ ($z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおいて、x, y に関する連立方程式を導いて、それを解け)。

問 1 解説

(1) $z_1 = 3-3i,\ z_2 = 2+4i$ のとき

$$z_1+z_2 = 5+i, \quad z_1-z_2 = 1-7i, \quad z_1z_2 = 18+6i, \quad \frac{z_1}{z_2} = -\frac{3}{10}-\frac{9}{10}i,$$

$$|z_1| = \sqrt{3^2+(-3)^2} = 3\sqrt{2}, \quad \mathrm{Re}\, z_1 = 3, \quad \mathrm{Im}\, z_1 = -3, \quad \overline{z_1} = 3+3i.$$

(2)

$$\begin{aligned} z^2 = 3+2i \Leftrightarrow (x+yi)^2 = 3+2i \Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi = 3+2i \Leftrightarrow x^2-y^2 = 3 \wedge 2xy = 2 \\ \Leftrightarrow x^2-y^2 = 3 \wedge y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = 3 \wedge y = -\frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow x^4-3x^2-1 = 0 \wedge y = -\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$ であるから $x^2 \geq 0$ に注意すると

$$x^4-3x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = \frac{2\sqrt{13}+6}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2\sqrt{13}+6}}{2}.$$

このとき y は ($2\sqrt{13} > 6$ に注意して、分母分子に $\sqrt{2\sqrt{13}-6}$ をかけて)

$$y = \pm\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{13}+6}} = \pm\frac{2\sqrt{2\sqrt{13}-6}}{\sqrt{\left(2\sqrt{13}\right)^2-6^2}} = \pm\frac{2\sqrt{2\sqrt{13}-6}}{4} = \pm\frac{\sqrt{2\sqrt{13}-6}}{2} \quad (\text{複号同潤}).$$

(「複合」とか「復号」とか間違えないように。漢字のまちがいで減点する気はないですが…)

ゆえに

$$z = \pm\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{13}+6}}{2} + \frac{\sqrt{2\sqrt{13}-6}}{2}i\right).$$

(二重根号なので他の表し方があるかも…) ■