2024 年度 数理リテラシー 期末試験問題

2024 年 7 月 24 日 (水曜) 13:30〜15:30 施行, 担当　桂田 祐史

1.　次の各文を記号で表せ。ただし p と q は命題、A と B は集合、$f\colon A \to B$ と $g\colon B \to C$ は写像とする。
(1) i は虚数であり、e は無理数であり、3.14 は整数ではない有理数で、-3 は自然数ではない整数である。
(2) 「p ならば q」は「p でないか、または q である」と同値である。
(3) A と B の合併集合の補集合は、A の補集合と B の補集合の共通部分に等しい。　(4) f と g の合成写像の逆写像は、g の逆写像と f の逆写像の合成写像である。　(5) A が B のベキ集合の要素であるためには、A が B の部分集合であることが必要十分である。

2.　p, q, r, s は命題とするとき、以下の (1)〜(3) に答えよ。交換法則 $p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$ や結合法則 $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$, $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ は証明抜きに用いて良い。

(1) 真理値表を用いて $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ を示せ。真理値表は辞書式順序で書くこと。

(2) (1) の結果を用いて $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ を示せ。

(3) (1) と (2) の結果を用いて次式を示せ。

$$(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s).$$

3.　次の各命題の真偽を述べ、真である場合はそれを証明し、偽である場合はその否定命題を ($\neg$ を使わずに) 論理式で書いて証明せよ。
(1) $(\exists x \in \mathbb{Z})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ x + y = y$　(2) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x = e^y$

4.　(1) 集合が集合に含まれることの定義を述べよ。　(2) 2 つの集合の合併集合、共通部分、差集合、直積集合の定義を述べよ。　(3) (1 つの) 集合の補集合、ベキ集合の定義を述べよ。　(4) $A = \{p, q, r, s\}$, $B = \{1, 2\}$ とするとき、$A \times B$, 2^A を求めよ (要素を書き並べる方法で表せ)。また $2^{A \times B}$ の要素数を求めよ。
(5) 次の各命題の真偽を述べよ (根拠は不要)。(a) $\emptyset = \{\emptyset\}$　(b) $\emptyset \in \emptyset$　(c) $\emptyset \subset \emptyset$　(d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$　(e) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$
(f) $\{1, (2, 3), 4\} = \{4, 1, (2, 3)\}$　(g) $\{1, (2, 3), 4\} = \{1, (3, 2), 4\}$　(h) $\{1, \{2, 3\}, 4\} = \{4, 1, \{3, 2\}\}$

5.　A, B, C を集合とするとき、以下の各命題を証明せよ。(論理の法則は証明せずに用いて良い。集合についての法則は、簡単な法則でも証明してから使うこと)。
(1) $A \subset B \Rightarrow B^{\complement} \subset A^{\complement}$　(2) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$　(3) $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$

6.　(1) $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を集合族とするとき、$\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ の定義を書け。　(2) $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid -n < x < 2n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ と定める。このとき、(a) $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ を求めよ (証明は不要)。(b) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ を求め、それを証明せよ。

7.　(1) 写像について次の用語の定義を述べよ。(a) 単射　(b) 全射　(c) 全単射　(e) 逆写像
(2) 写像の逆写像の例をあげ、それが逆写像であることを (1)(e) で述べた定義に基づき証明せよ。
(3) $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ とするとき、以下の (i), (ii) を証明し、(iii) の反例を書け。
(i) f と g が単射ならば、$g \circ f$ は単射である。　(ii) $g \circ f$ が単射ならば、f は単射である。
(iii) $g \circ f$ が単射ならば、g は単射である。

8.　次の (1), (2), (3) の f について、以下の (i), (ii), (iii), (iv) を答えよ (簡単な根拠も書くこと)。
(i) f の値域　(ii) f が単射かどうか　(iii) f が全射かどうか　(iv) f が全単射な場合は f の逆写像、f が全単射でない場合は $g\colon I \to J$, $g(x) = f(x)$ $(x \in I)$ が全単射となる、なるべく幅の広い区間 I と J の組
(1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 3$ $(x \in \mathbb{R})$　(2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tanh x$　(3) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sinh x$
((iv) で逆写像を答える場合、高校で学んだ関数を用いて表すこと。なお、$\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$)

1 解説

(1) $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \land e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \land 3.14 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \land -3 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

(2) $p \Rightarrow q \equiv \neg p \lor q$

(3) $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$

(4) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

(5) $A \in 2^B \Leftrightarrow A \subset B$

2 解説

(1) 真理値表は

p	q	r	$p \lor q$	$(p \lor q) \land r$	$p \land r$	$q \land r$	$(p \land r) \lor (q \land r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

5 列目と 8 列目の真偽が一致するので $(p \lor q) \land r \equiv (p \land r) \lor (q \land r)$ が成り立つ。

(2)

$$\begin{aligned} p \land (q \lor r) &\equiv (q \lor r) \land p && \text{(交換法則を用いた)} \\ &\equiv (q \land p) \lor (r \land p) && \text{((1) を用いた)} \\ &\equiv (p \land q) \lor (p \land r) && \text{(交換法則を 2 回用いた)} \end{aligned}$$

であるから $p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$. ■

(3)

$$\begin{aligned} (p \lor q) \land (r \lor s) &\equiv (p \land (r \lor s)) \lor (q \land (r \lor s)) && \text{((1) を用いた)} \\ &\equiv ((p \land r) \lor (p \land s)) \lor ((q \land r) \lor (q \land s)) && \text{((2) を 2 回用いた)} \\ &\equiv (((p \land r) \lor (p \land s)) \lor (q \land r)) \lor (q \land s) && \text{(結合法則を用いた)} \\ &\equiv (p \land r) \lor (p \land s) \lor (q \land r) \lor (q \land s) && \text{(括弧を省略した)} \end{aligned}$$

であるから $(p \lor q) \land (r \lor s) \equiv (p \land r) \lor (p \land s) \lor (q \land r) \lor (q \land s)$. ■

3 解説

(1) 真である。(証明) $x = 0$ とおくと x は整数である。また、任意の実数 y に対して $x + y = 0 + y = y$ であるから $x + y = y$. ■

(2) 偽である。否定命題は $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ x \neq e^y$. (否定命題の証明) $x = -1$ とおくと x は実数である。また任意の実数 y に対して、$e^y > 0 > -1 = x$ であるから $x \neq e^y$. ■

4 解説

(1) A, B を集合とする。A が B に含まれるとは、$(\forall x \in A)\ x \in B$ が成り立つことをいう。

(2) A, B を集合とする。

- $\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ を A と B の合併集合と呼び、$A \cup B$ で表す。
- $\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ を A と B の共通部分と呼び、$A \cap B$ で表す。
- $\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ を A と B の差集合と呼び、$A \setminus B$ で表す。
- $\{z \mid (\exists x \in A)(\exists y \in B) z = (x, y)\}$ を A と B の直積集合と呼び、$A \times B$ で表す。

(3) X を全体集合, A をその部分集合とする。$X \setminus A$ を A の補集合と呼び、$A^{\complement}$ で表す。$\{B \mid B \subset A\}$ を A の冪集合と呼び、2^A あるいは $P(A)$ で表す。

(4) $A = \{p, q, r, s\}$, $B = \{1, 2\}$ であるから、

$$A \times B = \{(p,1),(p,2),(q,1),(q,2),(r,1),(r,2),(s,1),(s,2)\},$$

$$\begin{aligned}2^A = \{&\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{r\}, \{s\},\\ &\{p,q\}, \{p,r\}, \{p,s\}, \{q,r\}, \{q,s\}, \{r,s\},\\ &\{p,q,r\}, \{p,q,s\}, \{p,r,s\}, \{q,r,s\},\\ &\{p,q,r,s\}\}.\end{aligned}$$

A の要素数は 1, 2, 3, 4 のいずれかで、B の要素数は 2 であるから、$A \times B$ の要素数は 2, 4, 6, 8 のいずれかである。ゆえに $2^{A \times B}$ の要素数は $2^2 = 4$, $2^4 = 16$, $2^6 = 64$, $2^8 = 256$ のいずれかである。■

(5) (a) $\emptyset = \{\emptyset\}$ 偽

(b) $\emptyset \in \emptyset$ 偽

(c) $\emptyset \subset \emptyset$ 真

(d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ 真

(e) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ 真

(f) $\{1, (2,3), 4\} = \{4, 1, (2,3)\}$ 真

(g) $\{1, (2,3), 4\} = \{1, (3,2), 4\}$ 偽

(h) $\{1, \{2,3\}, 4\} = \{4, 1, \{3,2\}\}$ 真

5 解説

(1) $A \subset B$ を仮定する。x を $B^{\complement}$ の任意の要素とするとき、実は $x \in A^{\complement}$ である。(実際、もしそうでないとすると $x \in A$ となり、仮定 $A \subset B$ より $x \in B$ が導かれ、$x \in B^{\complement}$ と矛盾する。) ゆえに $B^{\complement} \subset A^{\complement}$. ■

(2) x を全体集合の任意の要素とするとき

$$\begin{aligned}x \in (A \cup B) \cap C &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in C && \text{(共通部分の定義)}\\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C && \text{(合併集合の定義)}\\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) && \text{(論理の分配法則)}\\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap C) \vee (x \in B \cap C) && \text{(共通部分の定義)}\\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) && \text{(合併集合の定義)}\end{aligned}$$

であるから、$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. ■

(3) $A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$ であるから、$A \subset B$. 同様に $B \subset A$. ゆえに　$A = B$. $\subset$ と $\subset$ の証明をすれば良いが、次のように一気にやってしまえる。

証明

$A \cup B = A \cap B$ を仮定する。
x を A の任意の要素とする。このとき $x \in A \vee x \in B$ が成り立つので、$x \in A \cup B$. 仮定 $A \cup B = A \cap B$ より $x \in A \cap B$. ゆえに $x \in A \wedge x \in B$. 特に $x \in B$. ゆえに　$A \subset B$.
同様にして (A と B を入れ替えるだけ) $B \subset A$ が証明できる。
ゆえに $A = B$.■

6 解説

(1) $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}$, $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}$.

(2) (a) $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$　(b) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 = (-1, 2)$.

(b) の証明

(i) x を $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ の任意の要素とすると、すべての自然数 n に対して、$x \in A_n$. 特に $n = 1$ とすると $x \in A_1$. ゆえに　$\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset A_1$.

(ii) 逆に x を A_1 の任意の要素とすると $-1 < x < 2$. 任意の自然数 n に対して、$n \geq 1$ であるから、$-n \leq -1$ かつ $2 \leq 2n$ が成り立つ。ゆえに $-n < x < 2n$. すなわち $x \in A_n$. ゆえに $x \in \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. 以上より $A_1 \subset \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

(i), (ii) より $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1$. ■

7 解説

(1) (a) $f \colon X \to Y$ が単射であるとは、

$$(\forall x \in X)(\forall x' \in X)(x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$$

を満たすことをいう。

(b) $f \colon X \to Y$ が全射であるとは、

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X) y = f(x)$$

を満たすことをいう。

(c) $f \colon X \to Y$ が全単射であるとは、f が単射かつ全射であることをいう。

(d) 写像 $f \colon X \to Y$ の逆写像とは、次の条件を満たす写像 $g \colon Y \to X$ のことをいう:

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \wedge f \circ g = \mathrm{id}_Y.$$

(2) $X = Y = \mathbb{R}$, $f \colon X \to Y$ を $f(x) = 2x$ $(x \in X)$ で定め、$g \colon Y \to X$ を $g(y) = \frac{1}{2}y$ $(y \in Y)$ で定めるとき、g は f の逆写像である。実際

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x) = \frac{1}{2} \cdot (2x) = x,$$

$$f \circ g(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{1}{2}y\right) = 2 \cdot \frac{1}{2}y = y$$

であるから $g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ が成り立っている。ゆえに g は f の逆写像である。

(3) (i) f と g が単射と仮定する。x, x' は X の任意の要素とする。$x \neq x'$ ならば、f が単射であることから $f(x) \neq f(x')$. g が単射であることから $g(f(x)) \neq g(f(x'))$. すなわち $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$. ゆえに $g \circ f$ は単射である。■

(ii) $g \circ f$ が単射と仮定する。x, x' を X の任意の要素とする。$x \neq x'$ ならば、仮定から $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$. ゆえに $g(f(x)) \neq g(f(x'))$. このとき実は $f(x) \neq f(x')$ である。実際、もしも $f(x) = f(x')$ ならば $g(f(x)) = g(f(x'))$ が成り立ち、$g(f(x)) \neq g(f(x'))$ と矛盾する。ゆえに $f(x) \neq f(x')$.
したがって、f は単射である。■

(iii) $X = \{1\}$, $Y = \{-1, 1\}$, $Z = \{-1, 1\}$, $f \colon X \to Y$, $f(1) = 1$, $g \colon Y \to Z$, $g(-1) = 1$, $g(1) = 1$ とする。このとき $g \circ f \colon X \to Z$, $g \circ f(1) = 1$ であり、これは単射であるが、g は単射ではない ($-1 \neq 1$ であるのに、$g(-1) = g(1)$)。■

8 解説

(1) (i) $f(x) = (x+1)^2 + 2$ であるから、f のグラフは頂点が $(-1, 2)$, 軸が $x = -1$ である下に凸の (昔は上開きと言ったけれど、それは今は言わないのかな) 放物線である。$f(\mathbb{R}) = [2, \infty)$. (厳密には中間値の定理を使って議論することになるが、細かいことはこの講義の範囲外であるから、ツッコマないことにする。)

(ii) f は単射ではない。実際 $x = -2$, $x' = 0$ とするとき、$x \neq x'$ であるが、$f(x) = 3 = f(x')$.

(iii) f は全射ではない。$f(\mathbb{R}) = [2, \infty) \neq \mathbb{R}$ であるから。

(iv) $X = [-1, \infty)$, $Y = [2, \infty)$ とすると、g は全単射となる ($g(\mathbb{R}) = [2, \infty)$ であるから全射, 狭義増加なので単射)。

(2) (i) f は連続な奇関数である。$x \geq 0$ の範囲で単調増加で、$f(0) = 0$, $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$. $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$. ゆえに $f(\mathbb{R}) = (-1, 1)$. (厳密には中間値の定理を使って議論することになるが…)

(ii) $f'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0$ であるから、f は狭義の増加関数である。ゆえに f は単射である。

(iii) $f(\mathbb{R}) = (-1, 1) \neq \mathbb{R}$ であるから f は全射ではない。

(iv) $X = \mathbb{R}$, $Y = (-1, 1)$ とすると、g は全単射となる (単射であることは f と同様。$g(\mathbb{R}) = (-1, 1) = Y$ であるから全射)。

(3) (i) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (複号同順) だから (厳密には中間値の定理を用いた議論をする)。

(ii) $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ であるから、f は狭義増加である。ゆえに f は単射である。

(iii) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ であるから f は全射である。

(iv) $X = e^x$ とおくと $X > 0$.

$$
\begin{aligned}
y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{X - 1/X}{2} \Leftrightarrow X^2 - 2yX - 1 = 0 \Leftrightarrow X = y + \sqrt{y^2 + 1} \\
&\Leftrightarrow x = \log\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).
\end{aligned}
$$

ゆえに $f^{-1}(y) = \log\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$ $(y \in \mathbb{R})$. ■