2014 年度 数理リテラシー 期末試験問題

2014 年 7 月 30 日 (水曜)13:00〜15:00 施行, 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2 枚) のみ提出

1.　次の各文を記号のみを用いて表せ。
(1) 「p ならば q」の否定は、「p であるが q でない」である。　(2) i は複素数であり、実数ではない。　(3) A と B の共通部分が A に等しければ、B は A を含む。　(4) x が A と B の合併集合 (和集合) の要素であるためには、x が A の要素であるか、または、x が B の要素であることが必要十分である。　(5) どんな実数 x よりも大きいような実数 y は存在しない。

2.　(1) 命題論理のド・モルガン律 $\neg(p\wedge q)\equiv(\neg p)\vee(\neg q)$, $\neg(p\vee q)\equiv(\neg p)\wedge(\neg q)$ を真理値表を用いて証明せよ。(2) $p\Rightarrow q$ とその対偶の真偽は一致することを示せ。

3.　(1) アルキメデスの公理 $(\forall a>0)\ (\forall b>0)\ (\exists n\in\mathbb{N})\ na>b$ の否定を書け。(2) 反例とは何か、量称記号 $\forall$, $\exists$ を用いて説明せよ。

4.　(1) 以下の言葉の定義を述べよ ((b)〜(e) は二つの集合に関するものを答えよ)。
(a) 部分集合　(b) 和集合　(c) 共通部分　(d) 差集合　(e) 直積集合　(f) ベキ集合
(2) $A=\{b,c,d\}$, $B=\{a,b,c\}$ とするとき、$A\cap B$, $A\cup B$, $A\times B$, 2^A, $A\setminus B$ を外延的に (つまり要素をすべて書き並べる方法で) 表せ。(注意: $A\setminus B$ については場合分けが必要である。)

5.　集合 X の任意の部分集合 A, B に対して、$A\cap B=\emptyset\Leftrightarrow A\subset B^c$ が成り立つことを証明せよ ($B^c=X\setminus B$ である)。

6.　(1) 集合族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の和集合 $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$, 共通部分 $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$ の定義を書け。　(2) すべての自然数 n に対して、

$$A_n:=\left(0,\frac{1}{2}-\frac{1}{4n}\right]\cup\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4n},1\right)=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ 0<x\le\frac{1}{2}-\frac{1}{4n}\ \text{または}\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4n}\le x<1\right\}$$

とおくとき、$\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ を簡単な式で表せ。　(3) (2) の結果を証明せよ。

7.　(1) 写像が全射であることの定義を述べ、全射な写像の例をあげよ。　(2) 写像が単射であることの定義を述べ、単射な写像の例をあげよ。　(3) $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to Z$ とするとき、以下の (a), (b) を証明し、(c) の反例を書け。　(a) f と g が単射であれば $g\circ f$ も単射である。　(b) $g\circ f$ が単射であれば f も単射である。　(c) $g\circ f$ が単射であれば g も単射である。

8.　関数 $f(x)=\dfrac{1}{x^4-1}$ の定義域 X を高校数学ルールで定めるとき (終域は $\mathbb{R}$, つまり $f\colon X\to\mathbb{R}$ とする)、$f(X)$, $f^{-1}(\mathbb{R})$, $f(\emptyset)$, $f^{-1}(\emptyset)$, $f(\{0\})$, $f(\{2\})$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{2\})$ を求めよ。

9.　$f\colon X\to Y$ とする。(1) X の部分集合 A の f による像 $f(A)$, Y の部分集合 B の f による逆像 $f^{-1}(B)$ の定義を記せ。(2) $B_1,B_2\subset Y$ とするとき、$f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$ を証明せよ。(3) $A_1,A_2\subset X$ とするとき、$f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$ を証明せよ。(4) $A\subset X$, $B\subset Y$ とするとき、$f\left(A\cap f^{-1}(B)\right)=f(A)\cap B$ を証明せよ。

10.　(1) $\mathbb{Z}$ 上の二項関係 $\sim$ を、$a\sim b\Leftrightarrow a-b$ は 3 の倍数, と定めるとき、$\sim$ は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係であることを示せ。
(2) 空でない集合 X 上の同値関係 $\sim$ があるとき、$x\in X$ の ($\sim$ に関する) 同値類を $C(x)$ を書くことにする。(a) $C(x)$ の定義を書け。(b) $x,y\in X$ とするとき、$C(x)\cap C(y)\neq\emptyset\Leftrightarrow C(x)=C(y)$ を示せ。

解答と解説

1. (1) $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$ (2) $i \in \mathbb{C} \wedge i \notin \mathbb{R}$ (3) $A \cap B = A \Rightarrow B \supset A$ (4) $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$ (5) $\neg((\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ y > x)$

解説 (5) の出来が今一つだった。$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ y > x$ は、「任意の実数 x に対して、y より大きい実数 y が存在する」あるいは「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して $y > x$」であり、「任意の実数 x よりも大きいような実数 y が存在する」は $(\exists y \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{R})\ y > x$ である。

2. (1) 真理値表は

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

となり、どちらの表も、4 列目と 7 列目の真理値が一致するので

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q), \quad \neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q).$$

(2) $p \Rightarrow q$ とその対偶 $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ の真理値表は

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

となるので、$p \Rightarrow q \equiv (\neg q) \Rightarrow (\neg p)$.

(別解) $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ であるから、

$$(\neg q) \Rightarrow (\neg p) \equiv \neg\neg q \vee \neg p \equiv q \vee \neg p \equiv \neg p \vee q \equiv p \Rightarrow q.$$

3. (1) $(\exists a > 0)\ (\exists b > 0)\ (\forall n \in \mathbb{N})\ na \leq b$ (2) $(\forall x)P(x)$ という命題に対して、$\neg P(x)$ が真となる x のことを反例と呼ぶ。反例が見つかった場合、$(\exists x)\neg P(x)$ が真であるが、この命題はもとの命題の否定 $\neg((\forall x)P(x))$ と同値であるので、もとの命題が偽であることを示している。 ■

4. (1)

(a) 集合 A, B に対して、$(\forall x)\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$ が成り立つとき、A は B の部分集合であるという。

(b) 集合 A, B に対して、$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ を A と B の和集合という。

(c) 集合 A, B に対して、$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ を A と B の共通部分という。

(d) 集合 A, B に対して、$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ を A と B の差集合という。

(e) 集合 A, B に対して、$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \wedge x \in B\}$ を A と B の直積集合という。ここで (x, y) は x と y の順序対を表す。

(f) 集合 A に対して、A の部分集合全体の集合 $2^A := \{X \mid X \subset A\}$ を A の冪集合という。

(2) $A \cap B = \{b, c\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d\}$, $A \times B = \{(b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c), (d, a), (d, b), (d, c)\}$, $2^A = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{b, c, d\}\}$,

$$A \setminus B = \begin{cases} \{d\} & (d \notin \{a, b, c\} \text{ のとき}) \\ \emptyset & (d \in \{a, b, c\} \text{ のとき}) \end{cases}$$

解説　(1)(a) の出来が非常に悪かった。B の部分集合というのは、B が空集合でもない限り、一つには定まらない。普通は二つの集合の関係（「包含関係」）として定義される。それなのに部分集合を (b) 以降と同様に、集合の内包的定義で書こうとした人がいた (書けるわけがない)。(a) の答を、念のため、他の形でも書いておく。

- (日本語による説明)「A が B の部分集合であるとは、A の任意の要素が B の要素であることをいう。」、「A の任意の要素が B の要素であるとき、A は B の部分集合である、あるいは A は B に含まれる、B は A を含む、という。」
- (条件を書いて定義) A が B の部分集合 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall x)$ $(x \in A \Rightarrow x \in B)$.

5.　$A \cap B = \emptyset$ と仮定する。$x \in A$ とするとき、$x \notin B$ が成り立つ。実際、もしも成り立たなかった場合、$x \in B$ より $x \in A \cap B$ であるから $A \cap B \neq \emptyset$ となり、これは仮定に矛盾する。

逆に $A \subset B^c$ と仮定する。このとき $A \cap B = \emptyset$ が成り立つ。実際、もしも成り立たなかった場合、$\exists x \in A \cap B$. これは $x \in A \wedge x \in B$ を意味するが、$x \in A$ と仮定 $A \subset B^c$ から $x \in B^c$. すなわち $x \notin B$. これは $x \in B$ と矛盾する。■

6.

(1) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}$.

(2) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = \left(0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right)$, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) = (0,1) \setminus \{1/2\}$.

(3) $a_n := \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4n}$, $b_n := \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4n}$ とおく、$\{a_n\}$ は狭義単調増加数列、$\{b_n\}$ は狭義単調減少数列、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$ が成り立つ。$A_n = (0, a_n] \cup [b_n, 1)$ であるから、$(\forall n \in \mathbb{N})$ $A_n \subset A_{n+1}$.

(a) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$ の証明: 集合族の共通部分の定義から、$\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_1$ が一般に成り立つ (実際 $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ならば、$\forall n \in \mathbb{N}$ $x \in A_n$ であるから、特に $n = 1$ として $x \in A_1$)。$x \in A_1$ とすると、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、上に述べたことから $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n$ であるから、$x \in A_n$. ゆえに $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. ゆえに $A_1 \subset \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(b) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$ の証明: $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n \subset (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$ であるから、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$.

$x \in (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$ とすると、$x \in (0, 1/2)$ または $x \in (1/2, 1)$. 前者の場合、$\varepsilon := 1/2 - x$ とおくと、$\varepsilon > 0$. アルキメデスの公理から、$(\exists N \in \mathbb{N})$ $N\varepsilon > 1$. ゆえに $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$. $0 < x = \dfrac{1}{2} - \varepsilon < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4N} = a_N$ であるから、$x \in (0, a_N) \subset A_N$. 後者の場合も、$\varepsilon := x - 1/2$ とおくと、$\varepsilon > 0$ で、アルキメデスの公理から $(\exists N \in \mathbb{N})$ $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$. $\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4N} = b_N$ であるから $x \in (1/2, b_N) \subset A_N$. ゆえに $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

7.

(1) $f\colon X \to Y$ とするとき、f が全射であるとは、$(\forall y \in Y)$ $(\exists x \in X)$ $y = f(x)$ が成り立つことをいう。

(2) $f\colon X \to Y$ とするとき、f が単射であるとは、$(\forall x, x' \in X)$ $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ が成り立つことをいう。

(3) (a) $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ がともに単射と仮定する。$x, x' \in X$, $x \neq x'$ とすると、f が単射であることから、$f(x) \neq f(x')$. g が単射であることから $g(f(x)) \neq g(f(x'))$. すなわち $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$. これは $g \circ f$ が単射であることを示している。

(b) $g \circ f\colon X \to Z$ が単射と仮定する。$x, x' \in X$, $x \neq x'$ とするとき、$f(x) \neq f(x')$ である (実際、もしも $f(x) = f(x')$ となったと仮定すると、$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = g \circ f(x')$ となり、$g \circ f$ が単射であることに矛盾する)。ゆえに f は単射である。

(4) $X = \{1\}$, $Y = \{1, -1\}$, $Z = \{1\}$, $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $f(1) = 1$, $g(1) = 1$, $g(-1) = 1$ とするとき、$g \circ f\colon X \to Z$, $g \circ f(1) = 1$ であり、$g \circ f$ は単射であるが、g は単射ではない。

解説

(i) (2) で $\Rightarrow$ を書かずに $\wedge$ やコンマ , を書く人が少なくない。$\wedge$ と $\Rightarrow$ はまったく違うことに注意すること。$(\exists x : P(x))\ Q(x)$ は $(\exists x)\ P(x) \wedge Q(x)$ であるが、$(\forall x : P(x))\ Q(x)$ は $(\forall x)\ P(x) \Rightarrow Q(x)$ である。その辺と混同しているのだろうか。

(ii) $f\colon X \to Y$ が単射であることは、$(\forall x, x')\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ とも表せる。こちらを使っても構わない。その場合の (3)(a) の証明は、

> $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ がともに単射と仮定する。$x, x' \in X$, $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ とすると、合成写像の定義によって $g(f(x)) = g(f(x'))$. g が単射であることから、$f(x) = f(x')$. f が単射であることから、$x = x'$. ゆえに $g \circ f$ は単射である。

また (3)(b) の証明は、

> $g \circ f\colon X \to Z$ が単射と仮定する。$x, x' \in X$, $f(x) = f(x')$ とする。$g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(f(x')\right) = g \circ f(x')$ であるから、$g \circ f$ が単射であることから $x = x'$. ゆえに f は単射である。

8. $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$ より、$x^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ であるから、X は ± 1 を除外して $X = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. 高校数学で f のグラフを描いて、$f(X) = (-\infty, -1] \cup (0, \infty)$.

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(\mathbb{R}) = X, \\
&f(\emptyset) = \emptyset, \quad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \\
&f\left(\{0\}\right) = \{f(0)\} = \{-1\}, \quad f\left(\{2\}\right) = \{f(2)\} = \left\{\frac{1}{15}\right\}.
\end{aligned}$$

$(\forall x \in X)\ f(x) \neq 0$ であるから、$f^{-1}\left(\{0\}\right) = \emptyset$.

$f(x) = 2 \Leftrightarrow x^4 - 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$ であるから、$f^{-1}\left(\{2\}\right) = \left\{\sqrt[4]{\frac{3}{2}}, -\sqrt[4]{\frac{3}{2}}\right\}$.

解説　問題に応じて、考える必要があるのは X と $f(X)$ を求めるときであろうか。この問題は、$f(X)$ を求めるのが難しい (もう少し簡単な関数にすべきだったろうか？)。この手の問題を解いてみせるとき、必ずグラフを描くことにしているが、グラフを描くのをさぼる人が多い。なるべく描くようにしよう。

$f\colon X \to Y$ に対して、一般に $f^{-1}(Y) = X$, $f(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f\left(\{a\}\right) = \{f(a)\}$ であるので (これらは授業で証明してある…もっとも暗記して使うよりは、自分で証明して使えるのが本当だが)、半数以上は機械的に求まる。$f^{-1}\left(\{b\}\right)$ は $f(x) = b$ の解全体である。

9.

(1) $f(A) = \{y \in Y \mid (\exists x \in A) y = f(x)\}$, $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

(省略形の $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ でも可。(3) の証明をするときなどは、省略形でない方を思い出す必要がある。)

(2) 任意の $x \in X$ に対して

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \\
&\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in \cap B_2 \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)
\end{aligned}
$$

であるから $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(3) $y \in f(A_1 \cup A_2)$ と仮定すると、$(\exists x \in A_1 \cup A_2)\ y = f(x)$. $x \in A_1$ または $x \in A_2$ である。$x \in A_1$ のときは $y \in f(A_1)$, $x \in A_2$ のときは $y \in f(A_2)$ であるから、つねに $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. ゆえに $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$.

逆に $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$ である。実際、$A_1 \subset A_1 \cup A_2$ から $f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2)$. 同様に $A_2 \subset A_1 \cup A_2$ から $f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$. ゆえに $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$.

以上から $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(あまり勧められない別証)

$$
\begin{aligned}
y \in f(A_1 \cup A_2) &\Leftrightarrow (\exists x \in A_1 \cup A_2) y = f(x) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)\left[(x \in A_1 \cup A_2) \wedge y = f(x)\right] \\
&\Leftrightarrow (\exists x)\left[(x \in A_1 \vee x \in A_2) \wedge y = f(x)\right] \\
&\Leftrightarrow (\exists x)\left[(x \in A_1 \wedge y = f(x)) \vee (x \in A_2 \wedge y = f(x))\right] \\
&\Leftrightarrow (\exists x_1)(x_1 \in A_1 \wedge y = f(x_1)) \vee (\exists x_2)(x_2 \in A_2 \wedge y = f(x_2)) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2).
\end{aligned}
$$

(実はこう書かれた場合、書いた人が本当に理解しているかどうか、採点者として少なからぬ不安がある。)

注意　集合が等しいこと $A = B$ の証明は、$(\forall x)[x \in A \Rightarrow x \in B]$ と $(\forall x)[x \in B \Rightarrow x \in A]$ を証明するのが基本である、と言ってあるが、上の最初の解答例のようにした人は少なく、別証の出来そこないバージョンを書いて沈没した人が多かった。別証は途中で $(\exists x) P(x) \vee Q(x) \equiv (\exists x_1) P(x_1) \vee (\exists x_2) Q(x_2)$ という定理を用いている。$\vee$ でなく $\wedge$ の場合は、$\equiv$ でなく $\Rightarrow$ に弱めた $[(\exists x) P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow [(\exists x_1) P(x_1) \wedge (\exists x_2) Q(x_2)]$ しか成り立たないことに注意する。この違いを理解するために $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ を証明してみることを勧める。

10.

(1) 反射律、対称律、推移律が成り立つことを示す。

- $a \in \mathbb{Z}$ とするとき、$a - a = 0 = 3 \cdot 0$, $0 \in \mathbb{Z}$ であるから、$a \sim a$.
- $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \sim b$ とすると、$(\exists m \in \mathbb{Z})\ a - b = 3m$. このとき $b - a = -3m = 3(-m)$, $-m \in \mathbb{Z}$ であるから $b \sim a$.
- $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \sim b$, $b \sim c$ とすると、$(\exists m, n \in \mathbb{Z})\ a - b = 3m$, $b - c = 3n$. このとき $a - c = (a - b) + (b - c) = 3m + 3n = 3(m + n)$, $m + n \in \mathbb{Z}$ であるから $a \sim c$.

以上から $\sim$ は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係である。

(2) $C(x) = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \sim x\}$.

(3) ($\Rightarrow$ の証明) $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$ とすると、$(\exists z \in \mathbb{Z})\ z \in C(x) \cap C(y)$. このとき、$z \sim x$ かつ $z \sim y$. 対称律と推移律より $x \sim y$. $w \in C(x)$ とすると、$w \sim x$ であるから、$w \sim y$. ゆえに $y \in C(y)$ であるから、$C(x) \subset C(y)$. x と y を入れ替えても良いので $C(y) \subset C(x)$ が示せるので、$C(x) = C(y)$.

($\Leftarrow$ の証明) $C(x) = C(y)$ とすると、$C(x) \cap C(y) = C(x) \neq \emptyset$ ($x \in C(x)$ であるから). ■

解説.　実は (1) の出来が非常に悪かった。その原因は、山をはって事前に「解答」が出回ったが、それが間違っていて、それをコピーしたからだ、と想像している。例えば対称律の証明の書き出しが「$a - b = 3m$ $(m \in \mathbb{Z})$ とする。」となっていたりする。それでどうして「$a \sim b$ ならば $b \sim a$」の証明になるのだろう？証明の書き出しは、仮定を書くのが普通であるし、仮定を書くのを省略するにしても「$\sim$ の定義から $(\exists m \in \mathbb{Z})$ $a - b = 3m$ が成り立つ。」とすべきで「〜とする。」ではないはずである。