2013年度 数理リテラシー 期末試験問題

2013年7月25日 9:00〜11:00 施行, 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1.　以下の (1), (2), (3) に答えよ。p, q, r, s は命題を表すとする。

(1) 真理値表を用いることで、$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ を証明せよ。

(2) $(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$ を証明せよ。

(3) 連立方程式 $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 - x = 0 \\ y^3 + 3x^2y - y = 0 \end{cases}$ を解け。

2.　次の (1)〜(5) の各文を記号を使って表せ。(p, q は命題であり、A, B, X, Y は集合、$f\colon X \to Y$ は写像、$x \in X$, $y \in Y$ であり、i は虚数単位とする。)
(1) 「p ならば q」の否定は、「p であるのに q でない」である。　(2) i は複素数全体の集合と実数全体の集合の差集合に属する。　(3) A と B の共通部分の補集合は、A の補集合と B の補集合の和集合に等しい。　(4) 写像 f の x での値は y である。　(5) x が A と B の共通部分の要素であるためには、x が A の要素であり、かつ x が B の要素であることが必要十分である。

3.　(1) 2つの集合の共通部分、和集合の定義を述べよ。　(2) 補集合の定義を述べよ。
(3) $n = 1, 2, \ldots$ に対して、A_n は集合であるとする。
(a) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n$ の定義を述べよ。(b) $\displaystyle\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} (A_n^c)$ を証明せよ。
(注: $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n$ のことをそれぞれ $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ と書くこともある。)

4.　(1) 2つの集合の直積集合の定義を述べよ。(2) 集合のベキ集合の定義を述べよ。(3) $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$ のとき、$A \times B$ と $2^{A\times B}$ を外延的に表せ (要素をすべて列挙することで表せ)。

5.　(1) 以下の用語の定義を述べよ。　(a) 単射　(b) 全射　(c) 全単射　(d) 合成写像
(2) X, Y, Z は集合で、$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ とする。

(a) f と g が全射であれば、$g \circ f$ も全射であることを示せ。

(b) $g \circ f$ が全射であれば、g は全射であることを示せ。

(c) $g \circ f$ が全射であっても、f は全射であるとは限らない。反例をあげよ。

6.　X, Y, Z, W は集合で、$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ とするとき、$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ であることを示せ。

7.　高校数学の関数 $f(x) = \cos x$ から全単射な写像 $f\colon X \to Y$ を作れ (X はなるべく幅の大きい区間で、f が全単射であるように、X と Y を定めよ)。その写像が全単射である根拠を簡単に述べよ。

2枚目があります。

8. X と Y は集合で $f\colon X \to Y$ とする。

(1) $A_1, A_2 \subset X$ とするとき、$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ が成り立つことを示せ。

(2) $B_1, B_2 \subset Y$ とするとき、$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ が成り立つことを示せ。

9. (1) $f\colon [0, 2\pi] \to [-1, 1]$ を $f(x) = \cos x$ で定めるとき、以下のものを求めよ。
(a) $f(\emptyset)$ (b) $f(\{\pi/6\})$ (c) $f(\{\pi/6, 11\pi/6\})$ (d) $f^{-1}(\{-2\})$ (e) $f^{-1}(\{0\})$ (f) $f^{-1}([-2, 0])$
(2) $f\colon X \to Y$ が全単射で、$B \subset Y$ であるとき、$f^{-1}(B)$ という式には、次の (a), (b) 二つの解釈が可能である。どちらで解釈しても、同じ集合を表すことを示せ。

(a) f による B の逆像 (教科書の記号では $f^*(B)$)

(b) f の逆写像 f^{-1} による B の像 (教科書の記号では $(f^{-1})_*(B)$)

(つまり $f^*(B) = (f^{-1})_*(B)$ であることを示せ、ということである。)

10. (1) 空でない集合 X 上の 2 項関係 $\sim$ が同値関係であるとは、次の (i), (ii), (iii) が成り立つことをいう。$\boxed{\text{あ}}$, $\boxed{\text{い}}$, $\boxed{\text{う}}$ に当てはまるものを答えよ。

(i) (反射律) $\forall x \in X$ に対して $\boxed{\text{あ}}$

(ii) (対称律) $\forall x \in X, \forall y \in X$ に対して $\boxed{\text{い}}$

(iii) (推移律) $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X$ に対して $\boxed{\text{う}}$

(2) $\sim$ が空でない集合 X 上の同値関係であるとき、X の要素 x の属する同値類 $C(x)$ の定義を書け。任意の $x \in X$ に対して $C(x) \neq \emptyset$ である。なぜか答えよ。
(3) ある人が「対称律があれば、$x \sim y$ とするとき $y \sim x$. 推移律を用いると $x \sim x$ が導かれる。だから同値関係の定義で反射律は実は余分である。」と言った。正しいだろうか？

1.

(1) 真理値表で $p \vee q$, $(p \vee q) \wedge r$, $(p \wedge r)$, $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ で 2 点ずつ。〆に 2 点で

TF TF TF FF

(2) TTTF TTTF TTTF FFFF

(3) $(x, y) = (0, 0), (1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1), (1/2, 1/2), (1/2, -1/2), (-1/2, 1/2), (-1/2, -1/2)$ という 9 個の解が揃うかどうか。

2.

(1) $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

(2) $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

(3) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(4) $f(x) = y$ または $f \colon x \mapsto y$

(5) $x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \wedge x \in B$

3.

(1) A, B を集合とするとき、$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ を A と B の共通部分という。また $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ を A と B の和集合という。

(2) X を全体集合，$A \subset X$ とするとき、$A^c := \{x | x \in X \wedge x \notin A\}$ を A の補集合という。

(3) (1) $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n = \{x \mid \exists n \in \mathbf{N}\ x \in A_n\}$ (2) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n = \{x \mid \forall n \in \mathbf{N}\ x \in A_n\}$

4.

(1) A, B を集合とするとき、$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$ を A と B の直積集合という。

(2) A を集合とするとき、$2^A := \{B \mid B \subset A\}$ を A のベキ集合という。

(3) $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$ のとき、

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\},$$

$$\begin{aligned} 2^{A \times B} = \Big\{ & \emptyset, \{(1, a)\}, \{(1, b)\}, \{(2, a)\}, \{(2, b)\}, \\ & \{(1, a), (1, b)\}, \{(1, a), (2, a)\}, \{(1, a), (2, b)\}, \{(1, b), (2, a)\}, \{(1, b), (2, b)\}, \{(2, a), (2, b)\}, \\ & \{(1, b), (2, a), (2, b)\}, \{(1, a), (2, a), (2, b)\}, \{(1, a), (1, b), (2, b)\}, \{(1, a), (1, b), (2, a)\}, \\ & \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\} \Big\}. \end{aligned}$$

5.

(1) $f\colon X \to Y$ とする。

(a) f が単射とは、$\forall x, x' \in X$ に対して $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ が成り立つことという。

(b) f が全射とは、$\forall y \in Y, \exists x \in X$ s.t. $f(x) = y$ が成り立つことをいう。

(c) $f\colon X \to Y$ が全単射とは、f が単射かつ全射であることをいう。

(d) $g\colon Y \to Z$ とする。$h(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$ で定めた $h\colon X \to Z$ を f と g の合成写像といい、$g \circ f$ と表す。

(2) (a) f と g が全射であると仮定する。$\forall z \in Z$ に対して、g が全射であることから、$\exists y \in Y$ s.t. $g(y) = z$. f が全射であることから、$\exists x \in X$ s.t. $f(x) = y$. このとき、$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. ゆえに $g \circ f$ は全射である。

(b) $g \circ f$ が全射であると仮定する。$\forall z \in Z$ に対して、$g \circ f$ が全射であることから、$\exists x \in X$ s.t. $g \circ f(x) = z$. $y := f(x)$ とおくと、$g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z$. ゆえに g は全射である。

(c) $X = \{-1, 1\}$, $Y = \{-1, 1\}$, $Z = \{1\}$ $f(1) = 1$, $f(-1) = 1$, $g(-1) = 1$, $g(1) = 1$ とする。$g \circ f\colon X \to Z$ は全射であるが、f は全射でない。

6. $g \circ f\colon X \to Z$, $h\colon Z \to W$ であるから、$h \circ (g \circ f)\colon X \to W$. $h \circ g\colon Y \to W$, $f\colon X \to Y$ であるから、$(h \circ g) \circ f\colon X \to W$. そして $\forall x \in X$ に対して、

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x))),$$

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

ゆえに $(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$. ゆえに $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

7. $X = [0, \pi]$, $Y = [-1, 1]$ とすれば良い。$f\colon X \to Y$ は狭義単調減少なので単射である。また $y \in [-1, 1]$ とする。$y = -1$ のときは $x = \pi$, $y = 1$ のときは $x = 0$ とすれば $f(x) = \cos x = y$. $-1 < y < 1$ とすると、$f(0) = 1 > y > -1 = f(\pi)$ で、f は連続であるから、中間値の定理によって、$\exists(0, \pi)$ s.t. $f(x) = y$. ゆえに f は全射である。

8.

(1) $y \in f(A_1 \cup A_2)$ とすると、$\exists x \in A_1 \cup A_2$ s.t. $f(x) = y$. $x \in A_1$ のとき $y \in f(A_1)$. $x \in A_2$ のとき $y \in f(A_2)$. いずれの場合も $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. ゆえに $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$.

逆に $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ とすると、$y \in f(A_1)$ または $y \in f(A_2)$. $y \in f(A_1)$ のとき $\exists x_1 \in A_1$ s.t. $y = f(x_1)$. $y \in f(A_2)$ のとき $\exists x_2 \in A_2$ s.t. $y = f(x_2)$. いずれの場合も $\exists x \in A_1 \cup A_2$ s.t. $y = f(x)$. ゆえに $y \in f(A_1 \cup A_2)$. ゆえに $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$. あるいは

$$\begin{aligned} y \in f(A_1) \cup f(A_2) &\Leftrightarrow y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2) \\ &\Leftrightarrow \exists x_1 \in A_1\ y = f(x_1) \vee \exists x_2 \in A_2\ y = f(x_2) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in A_1 \cup A_2\ y = f(x) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A_1 \cup A_2) \end{aligned}$$

から $f(A_1) \cup f(A_2) = f(A_1 \cup A_2)$.

(2) $x \in X$ に対して、

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

ゆえに $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

9.

(1) $f(\emptyset) = \emptyset$, $f(\{\pi/6\}) = \{f(\pi/6)\} = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, $f\left(\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}\right) = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, $f^{-1}(\{-2\}) = \emptyset$, $f^{-1}(\{0\}) = \{\pi/2, 3\pi/2\}$, $f^{-1}([-2, 0]) = [\pi/2, 3\pi/2]$.

(2) $x \in X, y \in Y$ について $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ であることを注意する。

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}\right)_*(B) &= \left\{x \in X \mid \exists y(y \in B \wedge x = f^{-1}(y))\right\} = \{x \in X \mid \exists y(y \in B \wedge y = f(x)\} \\ &= \{x \in X \mid f(x) \in B\} = f^*(B). \end{aligned}$$

10.

(1) $\boxed{\text{あ}}$ は $\boxed{x \sim x}$, $\boxed{\text{い}}$ は $\boxed{x \sim y \Rightarrow y \sim x}$, $\boxed{\text{う}}$ は $\boxed{x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z}$

(2) $C(x) = \{y \in X \mid y \sim x\}$.

$x \in X$ とすると、反射率から $x \sim x$. ゆえに $x \in C(x)$.

(3) 正しくない。$x \sim y$ となる y が存在することは対称律や推移律からは導かれない。