

定義の書き方について Ver. 0.1

桂田 祐史

2024年7月27日, 2024年7月27日

重要であるのに、定義の書き方について、まとまった説明をしたことがなかったので、とりあえず書いてみた。全然自信がないので、Version 0.1 ということにしておく。

問 逆写像の定義として、以下のものは正しいかどうか述べよ。

(1) $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ とする。 g が f の逆写像であるとき、 $g \circ f = \text{id}_X$ かつ $f \circ g = \text{id}_Y$ が成り立つ。

あるいは

「 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ とする。 g が f の逆写像であるとき、 f と g は $g \circ f = \text{id}_X$ かつ $f \circ g = \text{id}_Y$ を満たす。」

(2) $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ とする。 $g \circ f = \text{id}_X$ かつ $f \circ g = \text{id}_Y$ を満たすとき、 g は f の逆写像であるという。

(3) $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ とする。 $g \circ f = \text{id}_X$ かつ $f \circ g = \text{id}_Y$ を満たすとき、そのときに限り、 g は f の逆写像であるという。

(4) $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ とする。 g が f の逆写像であるとは、 $g \circ f = \text{id}_X$ かつ $f \circ g = \text{id}_Y$ を満たすことをいう。

(5) $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ とする。 g が f の逆写像である $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} g \circ f = \text{id}_X$ かつ $f \circ g = \text{id}_Y$ 。

答 というか私が考えていることの言明

(1) × 正しい事実を主張しているが、定義になっていない。定義としては正しくない。 X という用語について、「 X のとき、 Y が成り立つ」というのは、 X についての性質の主張 (真であれば定理) であり、定義ではない。

(2) ○ という人 (数学者) も多いと思うが私は △ とする。 最近のテキストではこういう定義の書き方をしていることが多くなった。しかしこれでは、 $g \circ f = \text{id}_X$ かつ $f \circ g = \text{id}_Y$ を満たさない場合に g が f の逆写像ではないと断定できないのではないか? という気持ちがぬぐえない。用語 X の定義を述べたら、 Y が X であるかどうか、(すぐに分からないにしても) 定まるべきであるから、不適切な書き方であると考えている。でも、こう考える人は減りつつあるのだろう。私としては、この講義では定義を書くとき、この表現は使わないことにする。

(3) ○ この書き方には、(2) の書き方にある問題がない。これは定義の書き方として正しい。以前はこの (3) の表現が多かったが、最近は減ってきているようだ。個人的には「そのときに限り」というのがやや不自然に聞こえる気がするので、あまり使いたくない。近年の (2) の書き方が増えたのは、(3) のこの不自然さが原因なのかと推量している。

- (4) ○ これは定義の書き方として正しい。日常生活ではあまり目(耳?)にしない表現であるが、個人的には(3)ほど不自然な感じがないので、これを使うことにしている。個人的には◎。
- (5) ○ 黒板やプレゼンでは、完全な文を書かずに済ませることが多く、こういう書き方が認められている。両側矢印になっているので、(2)のような問題はない。私は以前は式を使って手短かに表現するのが好きだったので、この書き方を多用していたが、きちんとした文章にするのは大事だと考えるようになって、急いでいるとき以外は、(4)を採用することが多くなった。