2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント

万能の証明方法はないけれど、これは試すべき、という方法を紹介する。

☆1　$\forall x$ を見たら「x を任意の$\boxed{}$とする」のようなことを書く。

(「任意の」を省略するテキストも多いけれど、意味は「任意の」なので、この講義では省略せずに書く。さらに「x を任意の$\boxed{}$とする」自体を省略することもあるが…)

例 4.8

$(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0.$

証明　x を任意の実数とする。　(とにかくこう書いてみる。)

$x > 0$ の場合 $x^2 = x \cdot x > 0$ (正の数 x の積は正)

$x = 0$ の場合 $x^2 = 0^2 = 0$

$x < 0$ の場合 $x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0$ (正の数 $-x$ の積は正)

いずれの場合も　$x^2 \geq 0$ が成り立つ。 □

注意 (当たり前)　$\forall$ を使って書かれた命題を日本語に翻訳するときは、「すべての」と「任意の」のどちらも使えるが、証明を書くときは「任意の」一択である。「x をすべての実数とする」はおかしい。

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (1)

☆2　$\exists x$ を見たら、条件を満たす x が見つからないか考える。もし具体的に発見できたなら、ほぼ解決する。「x を$\boxed{}$とおくと」あるいは「x を$\boxed{}$とすると」と書き出せばよい。

例 4.9

$(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 - 3x + 2 = 0.$

(x を探す…実数で $x^2 - 3x + 2 = 0$ を満たすもの …… 方程式を解くと、$(x-1)(x-2) = 0$ から $x = 1, 2$)

証明　$x = 1$ とおくと、x は実数であり、

$$x^2 - 3x + 2 = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0.$$

ゆえに $x^2 - 3x + 2 = 0.$ □

注　方程式の解がつねに具体的に求まるとは限らないので、上に説明した手順は実行できないかもしれない。

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (2)

☆3　複数の量称 ($\forall$, $\exists$) がある場合は、左から順に処理する。

例 4.10

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) \quad x + y = 0.$$

証明　x を任意の整数とする。($\forall x \in \mathbb{Z}$ を見て、まずこうする。)
　(次に ($\exists y \in \mathbb{Z}$) $\cdots$ を見て、y を探す。整数で、$x + y = 0$ を満たすもの。y として $y = -x$ が見つかる。そこで$\cdots$)
　$y = -x$ とおくと、y は整数であり、

$$x + y = x + (-x) = 0.$$

ゆえに $x + y = 0$. □

($\forall x \cdots$) ($\exists y \cdots$) の証明を読んだとき、記号は x, y の順に現れる。

もう一つ例をあげる。

例 4.11

$$(\exists x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z}) \quad x + y = y.$$

$\exists x$ を見て、x を探す気持ちになる。$(\forall y \in \mathbb{Z})\ x + y = y$ を満たす x として、$x = 0$ が見つかる。そこで…

証明　$x = 0$ とおくと、x は整数であり、任意の整数 y に対して、

$$x + y = 0 + y = y.$$

ゆえに $x + y = y$. □