**数理リテラシー 宿題 No. 9** (2023 年 7 月 5 日出題, 7 月 10 日 13:30 Oh-o! Meiji に提出)

__年__ 組____番 氏名____________ (解答は何ページでも可. 1 つの PDF にして提出)

(1) (写像に関する) 以下の言葉の定義を述べよ。(a) 単射 (b) 全射 (c) 全単射

(2) 次の (a)〜(c) の各場合について、集合 $A$ から集合 $B$ への写像をすべて求め、写像の総数、単射であるものの個数、全射であるものの個数、全単射であるものの個数をそれぞれ求めよ。ただし $p \neq q$ とする。

(a) $A = \{0, 1\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ (a) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ (c) $A = \{0, 1\}$, $B = \{p, q\}$

(3) 次の各関数 $f$ について、単射であるかどうか、全射であるかどうか、全単射であるかどうか、それぞれ理由 (簡単で良い) をつけて答えよ。全単射でない場合、定義域 $X(\subset \mathbb{R})$ と終域 $Y(\subset \mathbb{R})$ を適当に小さく取って、$g\colon X \to Y$, $g(x) := f(x)$ $(x \in X)$ で定まる関数 $g$ が全単射であるようにせよ。ただし $X$ はなるべく幅の大きな区間を選ぶこと。条件を満たす $X, Y$ が一通りに定まらない場合は、どれか 1 つ見つけて答えれば良い。

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ (b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tanh x$ $(x \in \mathbb{R})$ (c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ $(x \in \mathbb{R})$

(3) は「単射だけ解けば良い。残りは次回に回します。」と言いましたが、解答を書いておきます。

**問 9 解説**

(1) (a) $f\colon X \to Y$ が単射とは、$(\forall x \in X)(\forall x' \in X)\ (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$ を満たすことをいう。
最後の部分を対偶 $(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$ で置き換えてもよい。
あるいは $(\forall x \in X)(\forall x' \in X\colon\ x \neq x')\ f(x) \neq f(x')$ としても良い。

(b) $f\colon X \to Y$ が全射とは、$(\forall y \in X)(\exists x \in X)\ y = f(x)$ を満たすことをいう。

(c) $f\colon X \to Y$ が全単射とは、$f$ が全射かつ単射であることをいう。

(脱線) それはさておき、否定を作れますか？

- $f\colon X \to Y$ が単射でない $\Leftrightarrow (\exists x \in X)(\exists x' \in X)\ (x \neq x' \wedge f(x) = f(x'))$.
あるいは、$(\exists x \in X)(\exists x' \in X\colon\ x \neq x')\ f(x) = f(x')$ でも良い。
- $f\colon X \to Y$ が全射でない $\Leftrightarrow (\exists y \in X)(\forall x \in X)\ y \neq f(x)$.
- $f\colon X \to Y$ が全単射でない $\Leftrightarrow$ $f$ が全射でないか $f$ が単射でない。

(2) (a) 総数は $3^2 = 9$ 個、単射 ${}_3\mathrm{P}_2 = 3 \cdot 2 = 6$ 個, 全射 0 個, 全単射 0 個。
$f$ を定めるには、$f(0)$, $f(1)$ を $B = \{2, 3, 4\}$ から選べば良い。

| $f(0)$ | $f(1)$ | 単射 | 全射 | 全単射 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | × | × | × |
| 2 | 3 | ○ | × | × |
| 2 | 4 | ○ | × | × |
| 3 | 2 | ○ | × | × |
| 3 | 3 | × | × | × |
| 3 | 4 | ○ | × | × |
| 4 | 2 | ○ | × | × |
| 4 | 3 | ○ | × | × |
| 4 | 4 | × | × | × |

(注: $\#X < \#Y$ なので、単射は存在するが全射は存在しない)

(b) 総数は $2^3 = 8$ 個、単射 0 個、全射 6 個, 全単射 0 個。
$f$ を定めるには、$f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ を $B = \{3, 4\}$ から選べば良い。

| $f(0)$ | $f(1)$ | $f(2)$ | 単射 | 全射 | 全単射 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 3 | × | × | × |
| 3 | 3 | 4 | × | ○ | × |
| 3 | 4 | 3 | × | ○ | × |
| 3 | 4 | 4 | × | ○ | × |
| 4 | 3 | 3 | × | ○ | × |
| 4 | 3 | 4 | × | ○ | × |
| 4 | 4 | 3 | × | ○ | × |
| 4 | 4 | 4 | × | × | × |

(注: $\#X > \#Y$ なので、全射は存在するが単射は存在しない)

(c) 総数は $2^2 = 4$ 個、単射, 全射, 全単射いずれも ${}_2\mathrm{P}_2 = 2$ 個。
$f$ を定めるには、$f(0)$, $f(1)$ を $B = \{p, q\}$ から選べば良い。

| $f(0)$ | $f(1)$ | 単射 | 全射 | 全単射 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | $p$ | × | × | × |
| $p$ | $q$ | ○ | ○ | ○ |
| $q$ | $p$ | ○ | ○ | ○ |
| $q$ | $q$ | × | × | × |
| $p$ | $p$ | × | × | × |

(注: $\#X = \#Y$ なので単射も全射も存在し、
単射 $\Leftrightarrow$ 全射 $\Leftrightarrow$ 全単射)

(3) まずグラフを描くことを勧める (グラフ自体は根拠にしにくいが分かりやすくなる)。

(a)
- $f$ は単射である。($\because$ $f'(x) = 3x^2 > 0\ (x \neq 0)$ であるから、$(-\infty, 0]$ と $[0, \infty)$ で狭義単調増加で、結局 $\mathbb{R}$ 全体で狭義単調増加である。ゆえに単射である。)

- $f$ は全射である。($\because$ $f$ は連続であり、$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ であるから、中間値の定理により、任意の実数 $y$ に対して、$f(x) = y$ となる 実数 $x$ が存在する。— きちんとやると、任意の実数 $y$ に対して、ある実数 $x_1, x_2$ が存在して、$f(x_1) < y < f(x_2)$. 中間値の定理によって、$[x_1, x_2]$ に $f(x) = y$ を満たす $x$ が存在する。)
- $f$ は全単射である ($\because$ $f$ は単射かつ全射であるから)。

(b)

- $f$ は単射である ($\because$ 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x} > 0$ であるので、$f$ は狭義単調増加であるから)。
- $f$ は全射でない ($\because$ $e^x > 0$, $e^{-x} > 0$ に注意すると、$-e^x - e^{-x} \le e^x - e^{-x} \le e^x + e^{-x}$. これを $e^x + e^{-x}$ $(> 0)$ で割り算して $-1 < \tanh x < 1$. ゆえに $y = 2$ とおくと $y$ は実数であるが、$\tanh x = y$ となる 実数 $x$ は存在しない。
- $f$ は全単射でない (全射でないから)。
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ であるから、$f(\mathbb{R}) = (-1, 1)$ であることが分かる。そこで $X = \mathbb{R}$, $Y = (-1, 1)$ とすれば、$g\colon X \to Y$ は全単射である。

(c)

- $f$ は単射でない。実際 $x = 0$, $x' = 2\pi$ とおくと、$x, x' \in \mathbb{R}$ かつ $x \neq x'$ かつ $f(x) = 1 = f(x')$. 手短に書くならば「$f(0) = f(2\pi)$ だから」。
- $f$ は全射でない。(任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $-1 \le f(x) \le 1 < y$ であるから $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. ゆえに $y = 2$ とおくと、$y \in \mathbb{R}$ であり、 $y \neq f(x)$.)。
- $f$ は全単射でない ($\because$ $f$ は単射でないから。$f$ は全射でないから、でも良い)。
- $X = [0, \pi]$, $Y = [-1, 1]$ とすると、$g$ は全単射である。実際、$g'(x) = f'(x) = -\sin x < 0$ $(x \in (0, \pi))$ であるから、$g$ は $[0, \pi]$ で狭義単調減少であるから単射である。また $g(0) = 1$, $g(\pi) = -1$ であり、$g$ は連続であるから、中間値の定理より、任意の $y \in [-1, 1]$ に対して $g(x) = y$ を満たす $x \in (0, \pi)$ が存在する。 ■