数理リテラシー 宿題 No. 8 (2023 年 6 月 28 日出題, 7 月 3 日 13:30 Oh-o! Meiji に提出)

＿年＿ 組＿＿番 氏名＿＿＿＿＿＿＿ (解答は何ページでも可. 1 つの PDF にして提出)

(1) 以下の各関数 (高校数学ルールで $f(x)$ の式だけ書いてある) について、定義域 (X と書くことにする) と値域 $f(X)$ を答えよ。ただし、実数の範囲だけで考える (虚数は考えない) ことにする。

(a) $f(x)=2x+\dfrac{3}{x}$ (b) $f(x)=\log\sqrt{x}$ (c) $f(x)=e^{-x^2}$

(2) 次の各写像の値域を求めよ。

(a) X,Y は集合で、$\emptyset\neq X\subset Y$ を満たすとき、$i\colon X\to Y$, $i(x)=x$ $(x\in X)$ で定めた i.

(b) X,Y が空でない集合のとき、$\mathrm{pr}_X\colon X\times Y\to X$, $\mathrm{pr}_X((x,y))=x$ $((x,y)\in X\times Y)$ で定めた pr_X.

注意 普通は $\mathrm{pr}_X((x,y))$ を $\mathrm{pr}_X(x,y)$ と略記する。以下の (c) でも同様。

(c) $g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $g(x,y)=(y,x)$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ で定めた g.

(d) X を空でない集合、$A\subset X$ とするとき、$\chi_A\colon X\to\mathbb{R}$, $\chi_A(x)=\begin{cases}1 & (x\in A)\\ 0 & (x\in X\setminus A)\end{cases}$ で定めた χ_A. (注: 解答には場合分けが必要になります。慎重に考えて下さい。)

問 8 解説

(1) (a) $f(x)=2x+\dfrac{3}{x}$ とする。この式が意味を持つ $\Leftrightarrow$ 分母が 0 にならない $\Leftrightarrow$ $x\neq 0$. ゆえに $X=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 0\}$ あるいは $X=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

解答の途中ですが解説します

このような微積に出て来るような関数の値域 $f(X)$ を求めるには、f の増減を調べると良い。

- グラフを描くのがおすすめ。
- もちろん微積分を使うという手もある。この関数は簡単で、相加平均と相乗平均の関係からすぐに分かる。
- 奇関数であるので、$x>0$ の範囲を調べれば、$x<0$ の範囲の増減もすぐ分かる。
- (注意) 厳密に議論するには、極限や中間値の定理を使うことになりそう。その辺は高校数学的にやることにする (大学でまだ習っていない)。

まず f は奇関数である (すなわち $(\forall x\in X)\ f(-x)=-f(x)$)。

$x>0$ のとき

$$f(x)=2\cdot\frac{2x+3/x}{2}\geq 2\sqrt{2x\cdot\frac{3}{x}}=2\sqrt{6}.$$

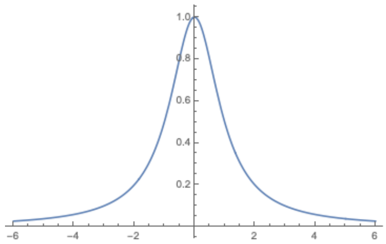
等号成立 $\Leftrightarrow$ $2x=\frac{3}{x}$ $\Leftrightarrow$ $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$. また $\lim_{x\to+0}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. これから f は $x>0$ の範囲で $2\sqrt{6}$ 以上のすべての値を取る[1]。ゆえに

$$f(X)=\left\{y\in\mathbb{R}\ \middle|\ y\leq -2\sqrt{6}\vee y\geq 2\sqrt{6}\right\}.$$

[1] $y>2\sqrt{6}$ とすると、$\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$ であるから、ある $x_1\in\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ が存在して、$f(x_1)>y$. 一方 $f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=2\sqrt{6}<y$. 中間値の定理を使って、$f(x)=y$ を満たす $x\in(x_1,\sqrt{\frac{3}{2}})$ が存在することが分かる。— こういう論法は慣れていないだろうから、要求しません。

(b) 式が意味を持つ $\Leftrightarrow$ log の「引数」(真数?) $\sqrt{x}$ は正の数 $\Leftrightarrow x > 0$. ゆえに $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. $f(x) = \frac{1}{2}\log x$ であり、log の値域は $\mathbb{R}$ であるから、$f(X) = \mathbb{R}$.
(簡単すぎたかも。$f(x) = \sqrt{\log x}$ の方が良かったかな？)

(c) 任意の実数 x に対して e^{-x^2} という式は定義されるので、$X = \mathbb{R}$. $f(x)$ は偶関数で、$f(0) = 1$, また $f(x) > 0$. $x > 0$ では f は単調減少で $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. ゆえに $f(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y \leq 1\}$.



(2) $f\colon X \to Y$ のとき $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ であるが、問題ごとに X, Y, f が何か読み取ることが大事。その後は $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ に代入する。

(a) $i\colon X \to Y$, $i(x) = x$ のとき。

$$i(X) = \{i(x) \mid x \in X\} = \{x \mid x \in X\} = X.$$

(b) $\mathrm{pr}_X\colon X \times Y \to X$, $\mathrm{pr}_X((x,y)) = x$ のとき。

$$\mathrm{pr}_X(X \times Y) = \{\mathrm{pr}_X((x,y)) \mid (x,y) \in X \times Y\} = \{x \mid x \in X \wedge y \in Y\} = X.$$

(c) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (y,x)$ のとき。

$$\begin{aligned} g(\mathbb{R}^2) &= \left\{g(x,y) \,\middle|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \{(y,x) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\} = \{(y,x) \mid y \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x', y') \mid x' \in \mathbb{R} \wedge y' \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

別解: $f(x,y) = (ax + by, cx + dy)$ で $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$ の場合と気づけば、$ad - bc = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0$ であるから、$g(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

(d) $A \subset X$, $X \neq \emptyset$, $\chi_A\colon X \to \mathbb{R}$, $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A \text{ のとき}) \\ 0 & (x \in X \setminus A \text{ のとき}) \end{cases}$ とするとき

$$\chi_A(X) = \begin{cases} \{0\} & (A = \emptyset \text{ のとき}) \\ \{1\} & (A = X \text{ のとき}) \\ \{0,1\} & (A \neq \emptyset \text{ かつ } A \neq X \text{ のとき}). \end{cases}$$

($A = \emptyset$, $A = X$ という極端な場合をうっかりする人が多い。)