数理リテラシー 宿題 No. 7　(2023 年 6 月 7 日出題, 6 月 12 日 13:30 Oh-o! Meiji に提出)

__年__ 組____番　氏名____________　　(解答は何ページでも可. 1 つの PDF にして提出)

(1) (a) A を集合とするとき、2^A の定義を書け。また、何と呼ばれるか答えよ。(b) $B=\{0,1,2\}$ とするとき、2^B を求めよ。(c) $A=\{a,b\}$ のとき、$B=2^A$, $C=2^B$ を求めよ。(ヒント: $B=\{p,q,r,s\}$ のとき 2^B は何か。)

(2) 集合 A, B, C, D が $A\subset B, C\subset D$ を満たすとき、$A\times C\subset B\times D$ が成り立つことを証明せよ。

(3) (a) 各自然数 n に対して集合 A_n が与えられているとき、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ は何か。定義を記せ。

任意の自然数 n に対して $A_n := \left\{x\in\mathbb{R} \;\middle|\; \frac{1}{n} < x \le 2n\right\}$ とする。

(b) A_1, A_2, A_3 を数直線上に表示せよ。

(c) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ と $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ を求めよ。余裕があれば、証明を試みること。

講義ノート「集合」の例 3.43で $A=\{a\}$ のとき、$B=2^A$, $C=2^B$ とするとき、正しくは $C=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{a\}\},\{\emptyset,\{a\}\}\}$ であるのに、$C=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{a\}\},\{0,\{a\}\}\}$ という誤植をやらかしていました。それに影響されたらしい誤答がありました。申し訳ない。

問 7 解説

(1) (a) $2^A=\{B \mid B\subset A\}$. A のベキ集合と呼ぶ。

(b) $2^B=\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{2\},\{1,2\},\{0,2\},\{0,1\},\{0,1,2\}\}$.

(c)

$$B=2^A=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}\,.$$

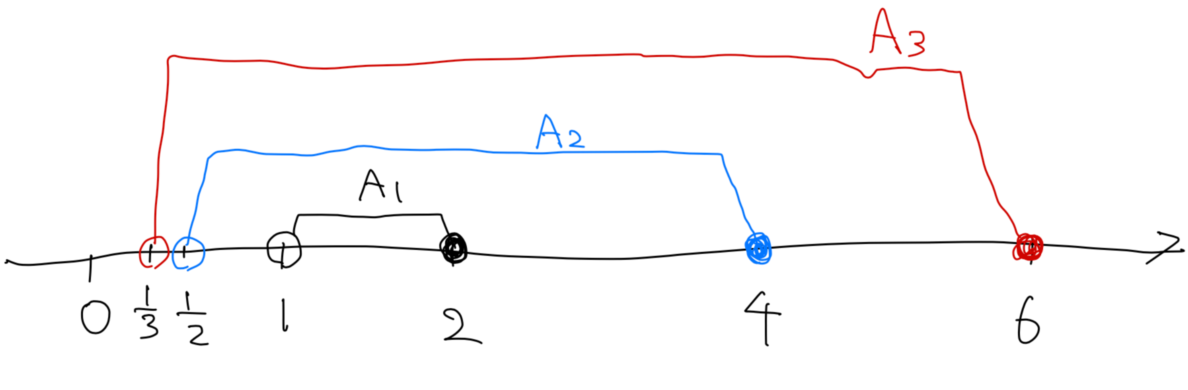
$$\begin{aligned}
C=2^B=\Big\{&\emptyset, && \leftarrow {}_4C_0=1\text{ 個}\\
&\{\emptyset\},\{\{a\}\},\{\{b\}\},\{\{a,b\}\}, && \leftarrow {}_4C_1=4\text{ 個}\\
&\{\emptyset,\{a\}\},\{\emptyset,\{b\}\},\{\emptyset,\{a,b\}\},\{\{a\},\{b\}\},\{\{a\},\{a,b\}\},\{\{b\},\{a,b\}\}, && \leftarrow {}_4C_2=6\text{ 個}\\
&\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\},\{\emptyset,\{b\},\{a,b\}\},\{\emptyset,\{a\},\{a,b\}\},\{\emptyset,\{a\},\{b\}\}, && \leftarrow {}_4C_3=4\text{ 個}\\
&\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}\Big\}. && \leftarrow {}_4C_4=1\text{ 個}
\end{aligned}$$

($\#2^B=2^{\#B}$ でベキ集合の要素数をチェックするのがお手軽な検算。集合の要素数ごとに細かくチェックすることも出来る、というのが赤く書いたところ。)

(2) $A\subset B$, $C\subset D$ を仮定する。x を $A\times C$ の任意の要素とすると、ある $a\in A$, $c\in C$ が存在して $x=(a,c)$. $A\subset B$ であるから $a\in B$. $C\subset D$ であるから $c\in D$. ゆえに $x=(a,c)\in B\times D$. 以上より $A\times C\subset B\times D$.

(3) (a) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=\{x \mid (\exists n\in\mathbb{N})x\in A_n\}$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n=\{x \mid (\forall n\in\mathbb{N})x\in A_n\}$.

(b) 中を塗っていない丸は含まれない、中を塗ってある丸は含まれることを意味する[1]。



(c) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=(0,\infty)=\{x\in\mathbb{R} \mid x>0\}$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n=A_1=\{x\in\mathbb{R} \mid 1<x\leq 2\}$. ■

[1]高校の数学の教科書の不等式の項でそうなっているので、授業の板書でもそうしたのだけど、区別しないで書く人が結構いる。