

数理リテラシー 練習問題 (2023年7月19日出題)

__年__組__番 氏名_____ (解答は次のページにあります)

問11 $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \cos x$ で定めるとき、以下の問に答えよ。

- (1) $A \subset [-\pi, \pi]$, $B \subset \mathbb{R}$ に対して、 $f(A)$, $f^{-1}(B)$ の定義を記せ。それぞれ何と呼ばれるか。
- (2) $f(\{\frac{\pi}{2}\})$, $f(\{0, \pi\})$, $f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$, $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$, $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}([\frac{1}{2}, 2])$ を求めよ (f を含まない式で表せ)。

$f: X \rightarrow Y, A \subset X, B \subset Y$ とするとき、一般に

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\},$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

と定義される。

問 11 解答

(1) $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$. ($f(x)$ を $\cos x$ と書いても良い。) $f(A)$ を A の f による像と呼ぶ。

$f^{-1}(B) = \{x \in [-\pi, \pi] \mid f(x) \in B\}$. ($f(x)$ を $\cos x$ と書いても良い。) $f^{-1}(B)$ を B の f による逆像と呼ぶ。

(2)

$$f\left(\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right) = \left\{f(x) \mid x \in \left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right\} = \left\{f(x) \mid x = \frac{\pi}{2}\right\} = \left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \left\{\cos \frac{\pi}{2}\right\} = \{0\}.$$

$$f(\{0, \pi\}) = \{f(x) \mid x \in \{0, \pi\}\} = \{f(x) \mid x = 0 \vee x = \pi\} = \{f(0), f(\pi)\} = \{\cos 0, \cos \pi\} = \{1, -1\}.$$

f は $[-\pi/2, 0]$ では単調増加、 $[0, \pi/2]$ では単調減少、 $f(-\pi/2) = 0, f(0) = 1, f(\pi/2) = 0, f$ は連続なので、値 $y = f(x)$ の範囲は $0 \leq y \leq 1$. ゆえに

$$f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left\{f(x) \mid x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 1\} = [0, 1].$$

逆像は、方程式や不等式を解くことになる。

$$f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{x \in [-\pi, \pi] \mid f(x) \in \left\{\frac{1}{2}\right\}\right\} = \left\{x \in [-\pi, \pi] \mid \cos x = \frac{1}{2}\right\} = \left\{\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right\}.$$

$$f^{-1}(\{2\}) = \{x \in [-\pi, \pi] \mid f(x) \in \{2\}\} = \{x \in [-\pi, \pi] \mid \cos x = 2\} = \emptyset.$$

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 2\right]\right) &= \left\{x \in [-\pi, \pi] \mid f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]\right\} = \left\{x \in [-\pi, \pi] \mid \frac{1}{2} \leq \cos x \leq 2\right\} \\ &= \left\{x \in [-\pi, \pi] \mid -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}\right\} = \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]. \end{aligned}$$