**数理リテラシー 宿題 No. 10**　(2023 年 7 月 12 日出題, 7 月 17 日 13:30 Oh-o! Meiji に提出)

__年__ 組____番　氏名______________　　(解答は何ページでも可. 1 つの PDF にして提出)

**問 10**　一部の問題を後回しにするかもしれない。授業中の解答指示に従うこと。

(1) 次の各関数 $f$ について、全射であるかどうか、全単射であるかどうか、それぞれ理由 (簡単で良い) をつけて答えよ (注: (a), (b) は単射、(c) は単射でない、と宿題 9 で分かった)。全単射でない場合、定義域 $X(\subset \mathbb{R})$ と終域 $Y(\subset \mathbb{R})$ を適当に小さく取って、$g\colon X \to Y$, $g(x) := f(x)$ $(x \in X)$ で定まる関数 $g$ が全単射であるようにせよ。ただし $X$ はなるべく幅の大きな区間を選ぶこと。条件を満たす $X, Y$ が一通りに定まらない場合は、どれか 1 つ見つけて答えれば良い。

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ $(x \in \mathbb{R})$　(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tanh x$ $(x \in \mathbb{R})$　(c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ $(x \in \mathbb{R})$

(2) $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ とする。$g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ であれば、$f$ と $g$ は全単射であることを示せ。

**問 10 解説**　(問 9 (3) の解答の写しです。)

(1) (a)

- $f$ は単射である。($\because f'(x) = 3x^2 > 0$ $(x \neq 0)$ であるから、$(-\infty, 0]$ と $[0, \infty)$ で狭義単調増加で、結局 $\mathbb{R}$ 全体で狭義単調増加である。ゆえに単射である。)
- $f$ は全射である。($\because f$ は連続であり、$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ であるから、中間値の定理により、任意の実数 $y$ に対して、$f(x) = y$ となる 実数 $x$ が存在する。— きちんとやると、任意の実数 $y$ に対して、ある実数 $x_1, x_2$ が存在して、$f(x_1) < y < f(x_2)$. 中間値の定理によって、$[x_1, x_2]$ に $f(x) = y$ を満たす $x$ が存在する。)
- $f$ は全単射である ($\because f$ は単射かつ全射であるから)。

(b)

- $f$ は単射である ($\because$ 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x} > 0$ であるので、$f$ は狭義単調増加であるから)。
- $f$ は全射でない ($\because e^x > 0$, $e^{-x} > 0$ に注意すると、$-e^x - e^{-x} \leq e^x - e^{-x} \leq e^x + e^{-x}$. これを $e^x + e^{-x}$ $(> 0)$ で割り算して $-1 < \tanh x < 1$. ゆえに $y = 2$ とおくと $y$ は実数であるが、$\tanh x = y$ となる 実数 $x$ は存在しない。
- $f$ は全単射でない (全射でないから)。
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ であるから、$f(\mathbb{R}) = (-1, 1)$ であることが分かる。そこで $X = \mathbb{R}$, $Y = (-1, 1)$ とすれば、$g\colon X \to Y$ は全単射である。

(c)

- $f$ は単射でない。実際 $x = 0$, $x' = 2\pi$ とおくと、$x, x' \in \mathbb{R}$ かつ $x \neq x'$ かつ $f(x) = 1 = f(x')$. 手短に書くならば「$f(0) = f(2\pi)$ だから」。
- $f$ は全射でない。(任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $-1 \leq f(x) \leq 1 < y$ であるから $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. ゆえに $y = 2$ とおくと、$y \in \mathbb{R}$ であり、 $y \neq f(x)$.)。
- $f$ は全単射でない ($\because f$ は単射でないから。$f$ は全射でないから、でも良い)。
- $X = [0, \pi]$, $Y = [-1, 1]$ とすると、$g$ は全単射である。実際、$g'(x) = f'(x) = -\sin x < 0$ $(x \in (0, \pi))$ であるから、$g$ は $[0, \pi]$ で狭義単調減少であるから単射である。また $g(0) = 1$, $g(\pi) = -1$ であり、$g$ は連続であるから、中間値の定理より、任意の $y \in [-1, 1]$ に対して $g(x) = y$ を満たす $x \in (0, \pi)$ が存在する。 ■