

数理リテラシー 宿題 No. 1 (2023年4月19日出題, 4月24日13:30までに Oh-o! Meiji に提出)

__年__組__番 氏名_____ (解答は裏面も使用可)

以下では、交換法則 $p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$ や結合法則 $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$, $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ は用いて良い。

- (1) 真理値表を用いて $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ を示せ。
- (2) (1) の結果を用いて、 $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ を示せ。
- (3) (1) と (2) の結果を用いて、次式を示せ。

$$(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \equiv (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s).$$

問1 解答 (2023年6月14日)

(1) 真理値表は

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F	T	F
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F	F

である。5列目と8列目の真偽が一致するので $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ 。

(2) まず交換律を使い、(1)の分配律を使い、さらに交換律を2回使うと

$$\begin{aligned} p \vee (q \wedge r) &\equiv (q \wedge r) \vee p \\ &\equiv (q \vee p) \wedge (r \vee p) \\ &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r). \end{aligned}$$

ゆえに $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ 。

(3) まず(1)を使い、それから(2)を2回使い、結合律を使い、最後にかっこを省略すると

$$\begin{aligned} (p \wedge q) \vee (r \wedge s) &\equiv (p \vee (r \wedge s)) \wedge (q \vee (r \wedge s)) \\ &\equiv ((p \vee r) \wedge (p \vee s)) \wedge ((q \vee r) \wedge (q \vee s)) \\ &\equiv (((p \vee r) \wedge (p \vee s)) \wedge (q \vee r)) \wedge (q \vee s) \\ &\equiv (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s). \end{aligned}$$

ゆえに

$$(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \equiv (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \vee (q \vee s). \blacksquare$$

- 間違えた答案・勘違いした答案はあまりなかったが、そういう答案にはバツをつけておいた。間違えた人は、完全に解決しておくこと。
- 真理値表の真偽を間違えた人はほとんどいなかったが、 p, q, r の真偽の順番が辞書式順序(樹形図を書いて得られる順番)になっていない人は結構いた。辞書式順序に並べること、できるようになろう。
- 式変形の根拠をきちんと説明できるようになろう。授業中の例では、根拠を全部説明するという方針でやった。面倒なのかサボった答案が少なくない。そういう答案にはマルをつけてない。
- 実質的にやっていることのほとんどは計算なのだけど、目的は証明なので、途中をむやみに省略すべきでない。

- 文字の書き方はそれはダメ、これがただししいと言にくい、「他の文字に見える」と言われたら反省して直す努力をすべき。
 \wedge, \vee が \cap, \cup に見えたり、 F が「下」に見えたり、 q が数字の 9 に見えたり、 p が k や \mathcal{R} に見えたり (英語の筆記体で文字を続けて書く場合はヒゲが出るのだけど、あまりヒゲは出さない方が良くも)。
 最近では筆記体を書けない人が多くなったので、6 に見えやすい b 、9 に見えやすい q 、1 に見えやすい l は、筆記体で書く、という手が使いにくいのかな？
- 授業中の例では、問 (3) で、先に (1) を使って、後から (2) を 2 回使ったが、順番を逆にと、最後に順番を変える必要が生じる。

$$p \wedge q \wedge r \wedge s \equiv p \wedge r \wedge q \wedge s.$$

これはなぜ成り立つのか？ 交換法則だけではない。それはそんなに難しくはないけれど、さぼっている (できない?) 人が多い。

$$\begin{aligned} p \wedge q \wedge r \wedge s &\equiv ((p \wedge q) \wedge r) \wedge s && \text{(定義)} \\ &\equiv (p \wedge (q \wedge r)) \wedge s && \text{(結合法則)} \\ &\equiv (p \wedge (r \wedge q)) \wedge s && \text{(交換法則)} \\ &\equiv ((p \wedge r) \wedge q) \wedge s && \text{(結合法則)} \\ &\equiv p \wedge r \wedge q \wedge s && \text{(定義)}. \end{aligned}$$

こういう面倒のない証明を選んでいる。

- 中括弧は集合を表すために使うため、演算子の結合順序を指定するのに使うと式が曖昧になる場合がある。演算の結合順序を指定するのに、中括弧 $\{ \}$ を使うのは、なるべく避けることを勧める。この数理リテラシーでは使わないことにしよう。 $[]$ は使っても良い。
 - $\{ \}, []$ を使う必要はない。() だけで用が足りる。僕は講義で $\{ \}, []$ を使っていないはず。深さで変えると言っても、3 つで足りるはずがない。
 - ちなみに英語文化圏では、(), [], $\{ \}$ の順で、 $\{ \}$ は最後に使う。
- 最後に式をもう一度書くのが面倒なのか、「題意が示された」と書く人がちらほらいるけれど、古めかしいので (そんなのは高校の教科書にないはず)、やめることを勧めている。「与式が成り立つ」とか。「与式」は今でも、英語でも (the assigned equation とか) 言うみたい。

- 今回の問は、授業中の例とほとんど同じように解くことが出来る。そうした人も多いが、違うようにやった人もいる。同じように解けることを授業中に言っている。話を聞いていないか、聞いても理解できないか、自分流で解きたいのか。どれなのかな。もちろん正しければそれで良いけれど、飛躍のある答案が多い (例を後で示す)。それから、同じで済むことならば、同じにやって、どちらも同じだ、と理解することは良いことである。文学と違って、科学の世界は統一出来ることはそうしてしまう。
- 正確に真似をすると、色々学べる (可能性がある) という利点がある。お稽古事をしている人は、真似は大事と知っているかも。
- 授業中の例題の真似をして書いて欲しかったのだが、色々省略した人が多い。特に言葉を書くのを省略した人は多いけれど (なんとなく式は大事だけれど、言葉は添えものと思っている)、書けるようになるには、一度は書くべきで、宿題ではさぼらないで書こう。