

2023 年度 数理リテラシー 中間試験問題

2023 年 6 月 21 日 4 限施行 (15:25~17:00 の予定), 担当 桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1. (1)~(5) の各文を 1 つの式で表せ。ただし、 p と q は命題、 A と B は集合、 $P(x)$ は変数 x についての述語とする。

- (1) $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ は複素数であるが実数ではなく、 $\frac{22}{7}$ は有理数であるが整数ではない。 (2) 「 p かつ q 」の否定は「 p でないか、または q でない」である。 (3) $x + \frac{1}{x} = 1$ を満たす実数 x は存在しない。
 (4) A と B の積集合が空集合であるためには、 A が B の補集合に含まれることが必要十分である。
 (5) 「任意の x に対して $P(x)$ が成り立つ」の否定は「 $P(x)$ が成り立たないような x が存在する」である。

2. p, q, r, s を任意の命題とするとき、以下の問に答えよ。

- (1) 真理値表を用いて、 $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ を示せ。 (2) (1) の結果と同値変形によって $(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$ を示せ。論理の交換法則と結合法則は用いて良い。
 (3) (2) を用いて連立方程式 $\begin{cases} y(3x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ x(3y^2 + x^2 - 1) = 0 \end{cases}$ を解け。(ヒント: $ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$)

3. 命題 (1),(2) の真偽を述べ、真ならば証明し、偽ならばその否定命題を書いて証明せよ。

- (1) $(\forall x > 0) (\exists y > 0) \sqrt{y} > x$. (2) $(\forall x \in \mathbb{Q}) (\exists y \in \mathbb{Q}) xy = 1$.

4. (1) 部分集合の定義を書け。 (2) A と B を集合とする。次の各集合の定義と呼び方を述べよ。

- (a) $A \cap B$ (b) $A \cup B$ (c) $A \setminus B$ (d) $A \times B$ (e) A^c (f) 2^A

(3) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{p, q\}$ とするとき、 $A \times B$ を求めよ。

(4) $A = \emptyset$ とするとき、 $B := 2^A$, $C := 2^B$, $D := 2^C$ を求めよ。

(5) 集合 A, B, C, D が $A \subset B$ かつ $C \subset D$ を満たすとき、 $A \setminus D \subset B \setminus C$ が成り立つことを示せ。

5. (1) 集合族とは何か。 (2) すべての自然数 n に対して集合 A_n が与えられているとき $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$,

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ の定義を書け。 (3) すべての自然数 n について $A_n \supset A_{n+2}$ が成り立つとき、 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 \cup A_2$

であることを示せ。 (4) $A_n = \{x \mid \frac{1}{n} < x < n\}$ とするとき、 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ と $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ を求めよ (証明不要)。

6. $(\forall a > 0) (\forall b > 0) (\exists n \in \mathbb{N}) na > b$ は正しい命題である (アルキメデスの公理と呼ばれている)。

(1) アルキメデスの公理の否定命題を書け。

(2) 以下の文章は、 $(\forall x > 0) (\exists n \in \mathbb{N}) \frac{1}{n} < x$ という命題の証明である。空欄を適切に埋めよ。

ア を任意の イ とする。 $a =$ ウ , $b =$ エ とおくと、アルキメデスの公理より、ある自然数 n が存在して、 $na > b$. ゆえに $\frac{1}{n} < x$. ■

(3) $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{n} < x\}$ とおくと、 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = (0, \infty)$ であることを証明せよ。

注意事項

この面を表にして配ります。試験開始まで裏返さないこと。

- 筆記用具と時計以外はカバンにしまって下さい。
- 15:25 に試験を始め、17:00 に終了する予定です。もし始まりが遅れたら、その分終わりの時間もずらします。
- 「解答用紙に自分の学年・組・番号・氏名を書いて下さい」と言われてから、筆記用具を取って解答用紙に記入し、記入し終わったら筆記用具を置いて下さい。
- 「はじめて下さい」の声を聞いてから、この紙を裏返して解答を始めて下さい。
- 問題は好きな順に解答して構いません。ただし一つの大問の解答は一ヶ所にまとめること。
- 解答用紙は裏面も使用して構いません。なるべく解答用紙 1 枚で済ませること。足りなくなった場合は試験監督(桂田)に申し出ること。
- 2 枚目の解答用紙を受け取ったら、すぐに自分の学年・組・番号・氏名を記入すること、解答用紙を回収するときは必ず 2 枚(2 枚目の上に 1 枚目を重ねて)提出すること。
- 遅刻は開始してから 30 分まで認めます。開始してから 40 分後から試験終了 10 分前までは途中退室を認めます(手をあげて試験監督に知らせ、解答用紙を渡し、静かに荷物をまとめて退室して下さい)。

1 解説 $4 \times 5 = 20$ 点

(1) $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \wedge \frac{22}{7} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

(2) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

(3) $\neg(\exists x \in \mathbb{R})x + \frac{1}{x} = 1$

(4) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$

(5) $\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x \neg P(x)$

- (2) で $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ とした人が多い。この講義では、論理の式で $=$ は使っていないので (区別したい理由がある)、減点しておいた。 \Leftrightarrow と書くのは構わない。
- (3) で $(\forall x \in \mathbb{R})x + \frac{1}{x} \neq 1$ とした人が多かった。計算してしまったわけだが、正解扱いした。
- (4) で $A \cap B = \{\emptyset\} \Leftrightarrow A \subset B^c$ とした人が複数いた。 \emptyset と $\{\emptyset\}$ は違うものであるので間違いである。
- (5) で $\neg(\forall x : P(x)) \equiv \exists x : \neg P(x)$ のような式を書いた人が多い。この講義ではそういう場合に $:$ は使っていない。減点した。

2 解説 $7 + 7 + 6 = 20$ 点

(1) 真理値表は

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

である。5列目と8列目の真偽が一致するので $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ 。

(2) 交換法則と (1) を使って

(♡) $p \wedge (q \vee r) \equiv (q \vee r) \wedge p \equiv (q \wedge p) \vee (r \wedge p) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ 。

$$\begin{aligned}
 (p \vee q) \wedge (r \vee s) &\equiv (p \wedge (r \vee s)) \vee (q \wedge (r \vee s)) && ((1) \text{ を使った}) \\
 &\equiv ((p \wedge r) \vee (p \wedge s)) \vee ((q \wedge r) \vee (q \wedge s)) && (\heartsuit) \text{ を使った} \\
 &\equiv (((p \wedge r) \vee (p \wedge s)) \vee (q \wedge r)) \vee (q \wedge s) && (\text{結合法則}) \\
 &\equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s). && (\text{かっこの省略})
 \end{aligned}$$

ゆえに

$$(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s).$$

(3) 連立方程式は、方程式を同時に満たすような未知数の値をすべて求める、という問題である。

$$y(3x^2 + y^2 - 1) = 0 \wedge x(3y^2 + x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (y = 0 \vee 3x^2 + y^2 - 1 = 0) \wedge (x = 0 \vee 3y^2 + x^2 - 1 = 0)$$

$y = 0, 3x^2 + y^2 - 1 = 0, x = 0, 3y^2 + x^2 - 1 = 0$ をそれぞれ、 p, q, r, s とおくと、 $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$ の形をしている。

$p \wedge r$ は

$$(x = 0 \wedge y = 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

$p \wedge s$ は

$$y = 0 \wedge 3y^2 + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \wedge x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (1, 0) \vee (x, y) = (-1, 0).$$

$q \wedge r$ は

$$3x^2 + y^2 - 1 = 0 \wedge x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 1) \vee (x, y) = (0, -1).$$

$q \wedge s$ は

$$3x^2 + y^2 - 1 = 0 \wedge 3y^2 + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \wedge y^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \vee (x, y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \vee (x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \vee (x, y) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

以上から

$$(x, y) = (0, 0), (1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right). \blacksquare$$

- 宿題1 そのものである。しかし、色々ひっかかった人が多い。
- 真理値表が辞書式順序でない人がかなり多かった。それは減点しないとしてあるが、採点が大変で、期末試験でどうするか考慮中。
- (1) で証明したのは $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ であって、 $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ は証明していないのに、それを証明せずに (2) で用いた場合は減点した。またその場合、式の順序が異なり、順番を入れ替える必要があるが、その部分でおかしなことをしている場合は不正解とした(1つの間に、2つまずいことがあった場合は零点)。
- (3) は、分配法則をどのように使うか説明できていれば、計算結果を間違えていても半分の点をつけた。 $x^2 = 1/4 \wedge y^2 = 1/4$ から $(x, y) = (1/2, 1/2), (1/2, -1/2), (-1/2, 1/2), (-1/2, -1/2)$ という4つの解が得られるが、 $(x, y) = (\pm 1/2, \pm 1/2)$ とだけ書くのは曖昧なので減点した。「(複号任意)」のような説明を書くなど工夫してほしい(個人的には「複号任意」は古めかしくて好みではないが)。

3 解説 $(2 + 6) + (2 + 4 + 6) = 20$ 点

- (1) 真。(証明) x を任意の正の数とする。 $y = (x + 1)^2$ とおくと、 $y > 0$ 。また $\sqrt{y} = \sqrt{(x + 1)^2} = x + 1 > x$ であるから $\sqrt{y} > x$ 。■
- (2) 偽。否定命題は $(\exists x \in \mathbb{Q}) (\forall y \in \mathbb{Q}) xy \neq 1$ 。(証明) $x = 0$ とおくと $x \in \mathbb{Q}$ 。また、任意の有理数 y に対して、 $xy = 0 \cdot y = 0 \neq 1$ であるから $xy \neq 1$ 。■

- (1) は最初に「 x を任意の正の数とする」のように x を導入して、後から「任意の正の数 y 」と y を導入する。いきなり「 $y = x^2 + 1$ とすると」とかしない。同様に (2) では、まず x を導入して、それから「任意の有理数 y 」と y を導入する。
- $y = x^4$ として $\sqrt{y} = x^2 > x$ とした人がいたが、 $x = 1$ や $x = 1/2$ のとき $x^2 > x$ は成り立たないので間違いである。 $y = x^2 + 1$ や $y = 2x^2$ などとする。

4 解説 $4 + 3 \times 6 + 4 + 4 + 10 = 40$ 点

(1) A, B を集合とする。 A が B の部分集合であるとは、 $(\forall x \in A) x \in B$ が成り立つことをいう。

(2)

$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ A と B の積集合

$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ A と B の和集合

$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ A と B の差集合

$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ A と B の直積集合

$A^c := \{x \mid x \in X \wedge x \notin A\}$ A の補集合, ただし全体集合を X と表した。

$2^A := \{C \mid C \subset A\}$ A のべき集合。

(3)

$$A \times B = \{(0, p), (0, q), (1, p), (1, q), (2, p), (2, q)\}$$

(4)

$$B = \{\emptyset\}, \quad C = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad D = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$$

(5) $A \subset B$ かつ $C \subset D$ を仮定する。 x を $A \setminus D$ の任意の要素とすると、 $x \in A$ かつ $x \notin D$. $A \subset B$ であるから、 $x \in A$ より $x \in B$. $C \subset D$ であるから、 $x \notin D$ より $x \notin C$ (実際、もしも $x \in C$ とすると $x \in D$ となって矛盾する。). 以上より $x \in B \setminus C$. ゆえに $A \setminus D \subset B \setminus C$. ■

- (1) は (2) とは、答え方がかなり違う。(2) で現れる集合はただ1つに定まるもので、集合 := 定義する式のように説明できるが、(1) の部分集合は、普通は複数あるので、「集合 A が集合 B の部分集合であるとは、 \sim という条件が成り立つことをいう」のような表現 (文でなく式で書くと、 $A \subset B \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall x \in A) x \in B$ とか) が必要になる。
- (3) でカンマを全く書かない答案「 $A \times B = \{(0, p)(0, q)(1, p)(1, q)(2, p)(2, q)\}$ 」には点を与えなかった。
- (4) で $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ と間違えた人が多い。空集合の部分集合は空集合だけである (普通、任意の集合 A に対して、 $\emptyset \subset A$ と $A \subset A$ の両方が成り立つが、空集合については両者が同じものである)。「要素数が n である集合の要素数は 2^n 」というチェック法を適用すると、空集合 A の要素数は 0 ($\#\emptyset = 0$) であるから、 $\#B = 2^0 = 1$, $\#C = 2^1 = 2$, $\#D = 2^2 = 4$ である。

5 解説 $3 + (3 + 3) + 5 + (3 + 3) = 20$ 点

(1) 集合を要素とする集合を集合族という。

(2)

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}, \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}.$$

(3) $(\forall n \in \mathbb{N}) A_n \supset A_{n+2}$ を仮定する。

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \supset A_1 \cup A_2$ であること x を $A_1 \cup A_2$ の任意の要素とすると、 $x \in A_1 \vee x \in A_2$. $x \in A_1$ の

とき、 $n = 1$ とおくと、 $n \in \mathbb{N}$ かつ $x \in A_n$. ゆえに $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. $x \in A_2$ のとき、 $n = 2$ と

おくと、 $n \in \mathbb{N}$ かつ $x \in A_n$. ゆえに $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. いずれの場合も $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ が成り立つ。

ゆえに $A_1 \cup A_2 \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset A_1 \cup A_2$ であること x を $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ の任意の要素とする。ある自然数 n が存在して $x \in A_n$.

n が奇数のとき

$$A_1 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_{n-2} \supset A_n$$

であるから $A_n \subset A_1$. ゆえに $x \in A_1$. ゆえに $x \in A_1 \cup A_2$.

n が偶数のとき

$$A_2 \supset A_4 \supset \cdots \supset A_{n-2} \supset A_n$$

であるから $A_n \subset A_2$. ゆえに $x \in A_2$. ゆえに $x \in A_1 \cup A_2$.

いずれの場合も $x \in A_1 \cup A_2$. ゆえに $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset A_1 \cup A_2$. ■

(4)

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 = \emptyset, \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}.$$

- 「集合を要素とする集合を集合族という。」は少し曖昧だったかもしれない。要素に集合以外のものが1つでもあったらダメなので、「要素がすべて集合である集合を集合族という。」と説明すべきだったか。その辺は緩く採点しておいた。
- (2) でおかしい式を書いた人がいる。集合を式で書くやり方は確実にマスターしよう。 $\{x \mid P(x)\}$ という基本的なパターンに従っていることを理解して欲しい。

6 解説 $3 + 4 \times 2 + 4 + 5 = 20$ 点

(1) $(\exists a > 0) (\exists b > 0) (\forall n \in \mathbb{N}) na \leq b$

(2) は「 x 」, は「正の数」, は「 x 」, は「1」

と は両方正しい場合に加点。 と も同様。

(3) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset (0, \infty)$ であること x を $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ の任意の要素とすると、ある自然数 n が存在して $x \in \mathbb{R}$

かつ $\frac{1}{n} < x$. ゆえに $0 < x$. すなわち $x \in (0, \infty)$. ゆえに $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset (0, \infty)$. ■

$(0, \infty) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ であること x を $(0, \infty)$ の任意の要素とすると $x > 0$. (2) より、ある自然数 n

が存在して $\frac{1}{n} < x$. このとき $x \in A_n$. ゆえに $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. よって、 $(0, \infty) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. ■

以上より $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = (0, \infty)$. ■