

数理リテラシー 第12回
～ 写像 (2) ～

桂田 祐史

2023年7月5日

目次

- 1 本日の内容&連絡事項
- 2 写像 (続き)
 - 写像の例 (続き)
 - 微分
 - 数列
 - 合成写像
 - 定義
 - 写像の合成についての結合律
 - 単射, 全射, 全単射
 - 単射, 全射, 全単射の定義
 - 単射, 全射, 全単射の例
 - 単射, 全射, 全単射の合成
- 3 参考文献

本日の内容&連絡事項

- 本日の講義内容: 写像の合成, 単射・全射・全単射 (続き) と逆写像
今日を含めて後3回ありますが、今回と次回でなるべくたくさん説明するつもりです。
- 宿題9の解説を行います。
- 宿題10を出します。締め切りは7月10日(月曜)13:30です。

例 12.1 (微分)

$C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ を \mathbb{R} から \mathbb{R} への C^∞ 級の (無限回微分可能な) 関数の全体とする。 $X := C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $Y := C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ とおき、 $D: X \rightarrow Y$ を

$$D(f) = f' \quad (f \in X)$$

で定める。ただし f' は f の導関数とする。

(無限回微分可能な関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を 1 回微分した f' も無限回微分可能である。つまり $f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ ならば、 $f' \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.)

$$D(\sin) = \cos.$$

$$F(x) = x^2, G(x) = 2x \text{ とするとき、 } D(F) = G.$$

例 12.2 (実数列)

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を実数列とする。このとき、写像 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ が $f(n) = a_n$ ($n \in \mathbb{N}$) として定まる。

逆に $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき、 $a_n = f(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) で a_n を定めると、実数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が得られる。

結局のところ、**実数列は、 \mathbb{N} から \mathbb{R} への写像に他ならない。**

X から Y への写像全体の集合を Y^X と表すことがある。

$$Y^X := \{f \mid f: X \rightarrow Y\}.$$

この記号を使うと、実数列全体の集合は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ と表せる。 □

4.5 合成写像 4.5.1 定義

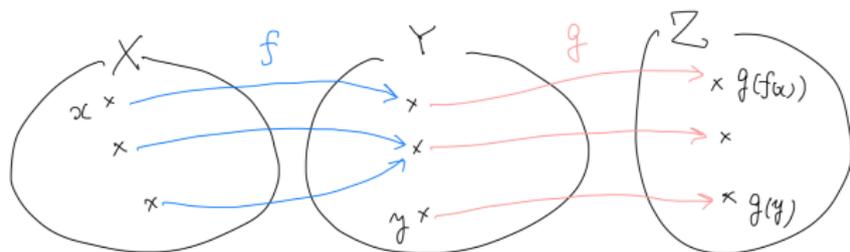
定義 12.3 (合成写像)

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ とするとき

$$h(x) = g(f(x)) \quad (x \in X)$$

で写像 $h: X \rightarrow Z$ が定まる。この h を f と g の**合成写像**と呼び、 $g \circ f$ で表す。すなわち

$$g \circ f: X \rightarrow Z, \quad g \circ f(x) = g(f(x)) \quad (x \in X),$$



4.5.1 定義 細かい注意 (ここはさらっと)

実は合成写像の定義については、テキストごとに細かいところで違いがある。この講義では、教科書 (中島 [1]) と同じにしたが、私は別の講義では、次のように定義している (同じようにする人は多い)。

定義 12.4 (合成写像の別の定義)

$f: X \rightarrow Y, g: Y' \rightarrow Z, f(X) \subset Y'$ であるとき、写像

$$h: X \rightarrow Z, \quad h(x) = g(f(x)) \quad (x \in X)$$

が定義できる。この h を f と g の合成写像と呼ぶ。

一般に $f(X) \subset Y$ であるから、 $Y = Y'$ のときは $f(X) \subset Y'$ が成り立つことに注意しよう。 $Y = Y'$ でなくても $f(X) \subset Y'$ であれば、 $g(f(x))$ が意味を持つので h が定義できる。

4.5.2 写像の合成についての結合律

定理 12.5 (写像の合成についての結合律)

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: Z \rightarrow W$ とするとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

一体何を証明すれば良いのか？ **写像が等しいとはどういうことか。**

証明 $g \circ f: X \rightarrow Z$ で、 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ($x \in X$) である。ゆえに $h \circ (g \circ f): X \rightarrow W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x))$$

一方、 $h \circ g: Y \rightarrow W$ で、 $(h \circ g)(y) = h(g(y))$ ($y \in Y$) である。ゆえに $(h \circ g) \circ f: X \rightarrow W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x))$$

ゆえに、 $h \circ (g \circ f)$ と $(h \circ g) \circ f$ では、定義域、終域、定義域に属する各々の要素の像、それぞれ等しいので、 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. \square

4.6 単射, 全射, 全単射

4.6.1 単射, 全射, 全単射の定義

定義 12.6 (単射, 全射, 全単射)

① $f: X \rightarrow Y$ が ^{たんしゃ}単射 (an injection, 形容詞は injective) あるいは **1対1** (one to one) であるとは、

$$\text{(＃)} \quad (\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$$

が成り立つことをいう。

② $f: X \rightarrow Y$ が ^{ぜんしゃ}全射 (a surjection, 形容詞は surjective) あるいは **上への写像** (an onto mapping, onto) であるとは、

$$\text{(b)} \quad (\forall y \in Y)(\exists x \in X) \quad y = f(x)$$

が成り立つことをいう。

③ $f: X \rightarrow Y$ が **全単射** あるいは **双射** (a bijection, 形容詞は bijective) であるとは、 f が全射かつ単射であることをいう。

(注 最近はあまり使われないが、**1対1対応** (one-to-one correspondence) という言葉があり、これは全単射という意味である。)

日本の高校では、 x' を「エックス ダッシュ」と読むのが普通だが、現代の英語では “ x **prime**” 「エックス **プライム**」と読むのが普通である。ダッシュ (dash) とは、ハイフン “-” より長い横棒 “-” (en-dash), “—” (em-dash) のことを言う。

「ことばの話 1835 「ダッシュ」」 [▶ Link](#) によると

渡辺正, 「ダッシュ」と「活動写真」, 『数学セミナー』1985年11月号, p. 13

にある程度詳しい事が載っているとか。

個人的に、古い英語 (England で使っているやつ) では、dash と読んだらしい、というのはどこかで目にした覚えがあったので、納得出来た。□

4.6.1 単射, 全射, 全単射の定義 図によるイメージ

写像が単射であるとは、2つ以上の矢が刺さっている的がないこと。

写像が全射であるとは、すべての的に矢が刺さっていること。

4.6.1 単射, 全射, 全単射の定義 条件の言い換え

単射の条件 (♯) $(\forall x \in X)(\forall x' \in X) (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$ は

$$(##) \quad (\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$$

と同値である (いわゆる対偶)。また

$$(\forall x \in X)(\forall x' \in X : x \neq x') \quad f(x) \neq f(x')$$

と書くことも出来る (後で使うことがある)。

全射の条件 (b) $(\forall y \in Y)(\exists x \in X) y = f(x)$ は

$$(bb) \quad Y = f(X)$$

とも書ける (ぜひ覚えよう)。実際

$$((\forall y \in Y)(\exists x \in X) \quad y = f(x)) \Leftrightarrow Y \subset f(X) \Leftrightarrow Y = f(X).$$

(\Leftrightarrow は、 $f(X) = \{y \mid (\exists x \in X) y = f(x)\}$ を思い出すと分かる。また、一般に $Y \supset f(X)$ が成り立つので、 \Leftrightarrow の \Rightarrow 方向が分かる。)

問

- ① $f: X \rightarrow Y$ が単射でないことを論理式で表わせ。
- ② $f: X \rightarrow Y$ が全射でないことを論理式で表わせ。

解答

- ① $(\exists x \in X) (\exists x' \in X: x \neq x') f(x) = f(x')$.
あるいは $(\exists x \in X) (\exists x' \in X) (x \neq x' \wedge f(x) = f(x'))$.
- ② $(\exists y \in Y) (\forall x \in X) y \neq f(x)$. □

4.6.2 単射, 全射, 全単射の例

例 $X = Y = \{1, 2\}$ とする。 X から Y への写像をすべて求め、単射であるか全射であるか調べよ。

考え方 X の各要素 1, 2 の像が何か (Y のどの要素か) 調べる。

解答 次の f_j ($j = 1, 2, 3, 4$) が X から Y への写像である。

j	$f_j(1)$	$f_j(2)$	単射	全射	全単射
1	1	1			
2	1	2			
3	2	1			
4	2	2			

f_1, f_4 は

- 2つ以上の矢が刺さっているものがあるので単射でない。
- 矢の刺さっていないものがあるので全射でない。

f_2, f_3 は

- 2つ以上の矢が刺さっているものがないので単射である。
- すべての的に少なくとも1つの矢が刺さっているので全射である。

4.6.2 単射, 全射, 全単射の例

例 12.7

X = ある時点での明治大学の学生全体, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ = 学生 x の学生番号 とするとき、 f は単射の**はず**である。

(もしそうでないと、違う学生に同じ学生番号が振られていることがある。それでは学生番号の役目を果たさないので、単射になるように決めてあるはず。) \square

例 12.8 (狭義単調ならば単射)

実軸上の区間 I で定義された実数値関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が、**狭義単調増加**であるとは、

$$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I) \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

を満たすことを言う。一般に**狭義単調増加関数は単射**である。

証明 $x, x' \in I$, $x \neq x'$ とする。このとき、(i) $x < x'$ (ii) $x > x'$ のいずれかが成り立つ。

(i) のとき $f(x) < f(x')$. (ii) のとき $f(x) > f(x')$. いずれの場合も $f(x) \neq f(x')$. ゆえに f は単射である。 \square

同様に狭義単調減少関数が定義されて、**狭義単調減少関数は単射**である。

4.6.2 単射, 全射, 全単射の例

2023/7/5 の授業はこの例の単射の部分まででした。

次の f_j ($j = 1, 2, 3, 4$) が単射であるか、全射であるか、全単射であるか、答えよ。

		単射	全射	全単射
$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$	$f_1(x) = x^2$			
$f_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$	$f_2(x) = x^2$			
$f_3: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$	$f_3(x) = x^2$			
$f_4: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$	$f_4(x) = x^2$			

- f_1, f_3 は単射でない $\because x = -1, x' = 1$ とすると、 $x, x' \in \mathbb{R}$,
 $x \neq x' \wedge f_j(x) = f_j(x')$.
- f_2, f_4 は単射である $\because f_j'(x) = 2x > 0$ ($x \in (0, \infty)$) であるから、 f_j は定義域 $[0, \infty)$ で狭義単調増加である。ゆえに f_j は単射である。
- f_1, f_2 は全射でない $\because y = -1$ とすると $y \in \mathbb{R}$ であり、 $y = f(x)$ を満たす x が存在しない。
- f_3, f_4 は全射である \because 任意の $y \in [0, \infty)$ に対して、 $x := \sqrt{y}$ とおくと、
 $x \in [0, \infty) \subset \mathbb{R} \wedge y = f(x)$.

以下は参考がてらつけておきます。

4.6.2 単射, 全射, 全単射の例

例 12.9

X を空でない集合とする。恒等写像 $\text{id}_X: X \rightarrow X$ は全単射である。

実際、 $x_1, x_2 \in X$ に対して、 $\text{id}_X(x_1) = \text{id}_X(x_2)$ ならば、 $x_1 = x_2$ が成り立つので、 id_X は単射である。

また、任意の $y \in X$ に対して、 $x := y$ とおくと、 $x \in X$ であり、 $\text{id}_X(x) = x = y$ であるから、 id_X は全射である。

以上から、 id_X は全単射である。

例 12.10

$\emptyset \neq X \subset Y$ とするとき、包含写像 $i: X \rightarrow Y$ は単射である。
(恒等写像の単射性の証明と同様。)

例 12.11

空でない集合 X, Y に対して、射影作用素 $\text{pr}_X: X \times Y \rightarrow X$ は全射である。
(すでに $\text{pr}_X(X \times Y) = X$ を示してある。ゆえに pr_X は全射である。)

4.6.3 単射, 全射, 全単射の合成

次の定理は基本的である。時間がないときは、(6) 以降は後回しで良い。

定理 12.12 (単射, 全射, 全単射の合成)

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ とする。

- ① f と g が単射ならば、 $g \circ f$ は単射である。
- ② f と g が全射ならば、 $g \circ f$ は全射である。
- ③ f と g が全単射ならば、 $g \circ f$ は全単射である。
- ④ $g \circ f$ が単射ならば、 f は単射である。
- ⑤ $g \circ f$ が全射ならば、 g は全射である。

- ⑥ $g \circ f$ が単射でも、 g は単射とは限らない。
- ⑦ $g \circ f$ が全射でも、 f が全射とは限らない。
- ⑧ $g \circ f$ が単射かつ f が全射ならば、 g は単射である。
- ⑨ $g \circ f$ が全射かつ g が単射ならば、 f は全射である。

4.6.3 単射, 全射, 全単射の合成 証明 パート 1

まず (1), (2) を図に描いて説明する。それから文章で説明する。

- ① f と g が単射と仮定する。 x, x' を X の任意の要素とする。 $x \neq x'$ と仮定すると f が単射であるから $f(x) \neq f(x')$ 。

g が単射であるから $g(f(x)) \neq g(f(x'))$ 。

すなわち $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$ 。ゆえに $g \circ f$ は単射である。

- ② f と g が全射と仮定する。

任意の $z \in Z$ に対して、 g が全射であることから、 $g(y) = z$ を満たす $y \in Y$ が存在する。

f が全射であることから、 $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ が存在する。このとき、

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z.$$

ゆえに $g \circ f$ は全射である。

- ③ f と g が全単射と仮定する。 $g \circ f$ は (1) から単射、(2) から全射であるので、全単射である。

4.6.3 単射, 全射, 全単射の合成 証明 パート 2

- ④ $g \circ f$ が単射と仮定する。 x, x' を X の任意の要素とする。
 $f(x) = f(x')$ と仮定すると、
 $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = g \circ f(x')$ であるから
 $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. $g \circ f$ が単射であるから、 $x = x'$. ゆえに f は単射である。
- ⑤ $g \circ f$ が全射と仮定する。 任意の $z \in Z$ に対して、ある $x \in X$ が存在して、 $z = g \circ f(x)$ が成り立つ。 このとき、 $y := f(x)$ とおくと、 $y \in Y$ であり、

$$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = z.$$

ゆえに g は全射である。

4.6.3 単射, 全射, 全単射の合成 証明 パート 3 (おまけ)

- ⑥ $X = \{1\}$, $Y = \{-1, 1\}$, $Z = \{1\}$, $f(1) = 1$, $g(1) = 1$, $g(-1) = 1$ と
して、 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ を定めると、 $g \circ f: X \rightarrow Z$,
 $g \circ f(1) = 1$ である。 $g \circ f$ は単射であるが、 g は単射でない。
- ⑦ (6) と同じ写像が反例となる。 $g \circ f$ は全射であるが、 f は全射でない。

4.6.3 単射, 全射, 全単射の合成 証明 パート 4 (おまけ)

(ここは授業ではカットするかも。教科書 (中島 [1]) にはもっと書いてあるけれど…)

- ⑧ $g \circ f$ が単射かつ f は全射と仮定する。 $y, y' \in Y$ が $y \neq y'$ を満たすとする。 f が全射であるから、 $f(x) = y$ かつ $f(x') = y'$ を満たす $x, x' \in X$ が存在する。 $y \neq y'$ であるから、 $x \neq x'$ である。 $g \circ f$ が単射であるから、 $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$ 。これから

$$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) \neq g \circ f(x') = g(f(x')) = g(y').$$

ゆえに g は単射である。

- ⑨ $g \circ f$ が全射かつ g は単射と仮定する。任意の $y \in Y$ に対して、 $z = g(y)$ とおくと、 $z \in Z$ である。 $g \circ f$ が全射であるから、 $g \circ f(x) = z$ を満たす $x \in X$ が存在する。このとき、 $g(f(x)) = z = g(y)$ であるが、 g が単射であるから、 $f(x) = y$ 。ゆえに f は全射である。 □

参考文献

- [1] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).