

数理リテラシー 第6回

～ 集合 (1) ～

桂田 祐史

2023年5月24日

目次

- ① 連絡事項・本日の内容
- ② 述語論理 (続き)
 - 量称を含む論理の法則, 特に否定命題 (続き)
- ③ 集合
 - はじめに
 - 集合の定義、要素
 - 集合の相等
 - 集合の表し方
 - 要素をすべて書き並べる方法 (外延的定義)
 - 要素の条件を書く方法 (内包的定義)
 - 和集合 ($A \cup B$) と積集合 ($A \cap B$)
 - 差集合 ($A \setminus B$) と補集合 (A^c)
- ④ 参考文献

- 本日の授業内容: 集合の基本用語 (定理はほぼない、習うより慣れろ) 桂田 [1] の §3.1–3.7 くらい?
3.5 (包含関係, 部分集合), 3.6 (空集合) を後回しにして、3.7, 3.8 を先に説明する。
- 宿題 4 の解説を行う。
- 宿題 5 を出す。メ切は 5 月 29 日 (月曜)13:30 です。原則として、5 月 31 日 15:20 以降の提出は受け付けません。何か事情がある場合は連絡して下さい (katurada あっと meiji ドット ac どっと jp)。

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題 (続き)

定理 6.1 (再度揭示)

以下の (1)~(7) が任意の述語 $P(x)$, $P(x, y)$ について成り立つ。

- ① $\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x (\neg P(x))$
「任意の x に対して $P(x)$ が成り立つ」の否定は「ある x が存在して $P(x)$ が成り立たない」
- ② $\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x (\neg P(x))$
「ある x が存在して $P(x)$ が成り立つ」の否定は「任意の x に対して、 $P(x)$ が成り立たない」
- ③ $\exists y \forall x P(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$
- ④ $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$
- ⑤ $\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$

これらは付帯条件つきでも成り立つ。例えば (1), (2) について

- ① $\neg((\forall x : P_0(x)) P(x)) \equiv (\exists x : P_0(x)) \neg P(x)$
- ② $\neg((\exists x : P_0(x)) P(x)) \equiv (\forall x : P_0(x)) \neg P(x)$

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題 (続き)

(このスライドはあまり気にしなくて良い) …授業ではカットした

定理 6.1 (続き)

$$\textcircled{6} \quad \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$$

$$\textcircled{7} \quad \exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))$$

- (6) で \wedge の代わりに \vee としたものは成り立たない。

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \quad (\text{真とは限らない})$$

- (7) で \vee の代わりに \wedge としたものは成り立たない。

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x)) \quad (\text{真とは限らない})$$

(例えば整数について考えていて、 $P(x)$ は「 x が偶数である」、 $Q(x)$ は「 x は奇数である」とすると、偽であることが分かる。)

集合は割と新しい。

Georg ^{カントール}Cantor (1845–1918) が創始者。色々難しいことをやった。
ここでは数学の言葉としての集合を習得することが目的である。

次のキーワードは覚えておくべき(?)

素朴な集合論 \longleftrightarrow 公理的集合論

3.2 集合の定義、要素

集合 (set) とは、範囲が明確に定まったものの集まりのことである。

ただし、1個だけでも集合である。また0個でも集合である (後で説明する空集合)。

A, B, \dots などの文字で表す (大文字を使うことが多い)。

集合 A に属するものを A の**要素**あるいは**元**^{げん}と呼ぶ (英語では element あるいは member と呼ぶ)。

a が集合 A の要素であることを

$$a \in A \quad \text{あるいは} \quad A \ni a$$

と表し、「 a は A に属する」、「 a は A に含まれる」、「 a belongs to A 」、「 a is in A 」、「 A は a を含む」、「 A includes a 」、「 A contains a 」などという。なるべく最初の「 a は A に属する」を使うことにする。

$a \in A$ の否定は、 $a \notin A$ あるいは $A \not\ni a$ と表す。

3.2 集合の定義、要素 (続き)

例 6.2

\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} (覚えているかな?)

それぞれ自然数全体の集合、整数全体の集合、有理数全体の集合、実数全体の集合、複素数全体の集合

例 6.3

「大きい数の全体の集合」は NG.

例 6.4

$1 \in \mathbb{N}$, $-1 \notin \mathbb{N}$, $-1 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$, $i \notin \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{C}$.
(ただし i は虚数単位である。)

3.2 集合の定義、要素 (続き) 読み方補足

$x \in A$ を「 A に属する x 」, “ x which belongs to A ”, 「 A の要素 x 」と読むのが適当な場合がある。

「任意の $x \in A$ に対して、 $x \in B$ 」は「 A に属する任意の x に対して x は B に属する。」あるいは「 A の任意の要素 x に対して x は B に属する。」

その他の例をあげる。

$x \in \mathbb{R}$ を「 \mathbb{R} に属する x 」, 「 \mathbb{R} の要素 x 」, 「実数 x 」と読む。

(やや脱線?) $x > 0$ を「正の数 x 」と読む。

3.3 集合の相等

2つの集合 A と B に対して、

$$\forall x((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A))$$

が成り立つとき、 A と B は**等しい**と定義し、 $A = B$ で表す。

\Leftrightarrow を用いると

$$\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

と書くこともできる。

教科書 (中島 [2]) では、 A と B が等しいとは

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

が成り立つこと、と書いてあるが、 $\forall x$ が省略されていると考えるべき。

$A = B$ の否定は $A \neq B$ で表す。

3.4 集合の表し方

3.4.1 要素をすべて書き並べる方法 (外延的定義)

要素を書き並べて (複数あるときは, で区切る)、 $\{\}$ (braces) で囲む。

例 6.5

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{0\}.$$

このとき $1 \in A$. しかし $0 \notin A$.

順番は不問にする (変えても同じ集合), 重複も認める

例 6.6

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3\}.$$

この方法は、要素が無限にたくさんあるときは困る。

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

と書くこともあるが、あいまいなことは否めない。

3.4.1 要素の条件を書く方法 (内包的定義) 授業後の補足

日常語で書いてあるだけでは不十分か。

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

とするとき

$$\forall x (x \in A \Leftrightarrow x = a_1 \vee x = a_2 \vee \dots \vee x = a_n).$$

3.4.2 要素の条件を書く方法 (内包的定義)

条件 $P(x)$ を満たす x 全体の集合は

$$\{x \mid P(x)\}$$

で表す。本によっては $\{x; P(x)\}$, $\{x : P(x)\}$ とも書く。

例 6.7

$$\begin{aligned} \{x \mid & x \text{ は実数} \} \\ \{y \mid & y \text{ は } 1 \text{ 以上 } 3 \text{ 以下の自然数} \} \\ \{n \mid & n \text{ は自然数かつ } 2 \text{ で割り切れる} \} \end{aligned}$$

例 6.8

$$\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\} = \{y \mid y \in \mathbb{R} \wedge y \geq 0\}$$

3.4.2 要素の条件を書く方法 (内包的定義)

1つの集合を表す内包的定義の書き方は無数にある。

例 6.9

$$\begin{aligned}\{1, 2, 3\} &= \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ かつ } 1 \leq x \leq 3\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ and } 0.3 < x < 3.7\} \\ &= \{x \mid x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0\}\end{aligned}$$

3.4.2 集合の内包的定義 (要素の条件を書く方法) \wedge の意味のコンマ

$\{x \mid P(x)\}$ において、 $P(x)$ が複数の条件を \wedge (かつ, and) で結んだ条件であるとき、 \wedge をコンマ, で済ませることが多い。

例えば

$$\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 < 2\}$$

を

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 < 2\}$$

のように書く。

この講義では省略せずに書く。

(時々、文章中の , の意味が \wedge か \vee か、文脈で判断することを期待されているときもある。)

3.4.2 集合の内包的定義 (要素の条件を書く方法) 変種

いくつか変種がある。

- ① $\{f(x) \mid P(x)\}$ は $\{y \mid (\exists x : P(x)) y = f(x)\}$ という意味とする。これは高校数学でもすでに使っていたはず。

例 6.10 (正の偶数全体の集合)

$$\{2n \mid n \text{ は自然数}\} = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N}) x = 2n\}.$$

例 6.11 (平方数の全体)

$$\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N}) x = n^2\}.$$

- ② $\{x \mid x \in A \wedge P(x)\}$ を $\{x \in A \mid P(x)\}$ と書く。

例 6.12

$$\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 3\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 3\}.$$

3.4.2 集合の内包的定義 (要素の条件を書く方法)

例 6.13

$$\begin{aligned} & \{x \mid x \text{ は } x^2 - x - 1 < 0 \text{ を満たす実数}\} \\ &= \{x \mid x \text{ は実数かつ } x^2 - x - 1 < 0\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - x - 1 < 0\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 - x - 1 < 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 1 < 0\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\} \\ &= \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right). \end{aligned}$$

ただし、最後に开区間の記号 $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ を用いた。

3.4.2 集合の内包的定義 (要素の条件を書く方法) 寄り道 区間の記号

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とするとき

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$

右側が ∞ , 左側が $(-\infty$ となっている場合も用いる。実数 x について、 $x < \infty$ と $-\infty < x$ はつねに成り立つので、その条件は書かなくても同じこと (例えば $a < x < \infty$ は $a < x$ と書けば良い)。

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\},$$

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},$$

$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\},$$

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\},$$

$$(-\infty, \infty) := \mathbb{R} \quad (\text{無条件なので実数全体}).$$

注意 (a, b) は点の座標の記号とかぶる。フランスでは $($ の代わりに $] ,)$ の代わりに $[$ を使う。例えば $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. 合理的かもしれない。

3.5 包含関係 (\subset), 部分集合, 3.6 空集合は次回に回します。

3.7 和集合と積集合

定義 6.14 (和集合, 積集合)

A, B を集合とする。

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

を A と B の **和集合** あるいは **合併集合** (union of A and B) と呼ぶ。

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

を A と B の **積集合**, **共通部分** あるいは **交わり** (intersection of A and B) と呼ぶ。

例 6.15

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ とするとき

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A \cap B = \{2, 3\}.$$

3.8 差集合と補集合

定義 6.16 (差集合, 補集合)

A, B を集合とする。

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

を A と B の **差集合** (set-theoretic difference of A and B) と呼ぶ。 $A - B$ と表すこともある。

考察する対象全体の集合 X が定まっている場合がある。そのとき X を **全体集合** (universal set) と呼び、 X の任意の部分集合 A に対して、 $X \setminus A$ を A の **補集合** (the complement of A) と呼び、 A^c で表す。

$$A^c := X \setminus A = \{x \mid x \in X \wedge x \notin A\}.$$

3.8 差集合と補集合 例と余談

例 6.17

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ とするとき

$$A \setminus B = \{1\}, \quad B \setminus A = \{4\}.$$

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ を全体集合と考えるとき、

$$A^c = \{4, 5, 6\}, \quad (A^c)^c = \{4, 5, 6\}^c = \{1, 2, 3\} = A.$$

後で説明するが、 $(A^c)^c = A$ は一般に成り立つ。 □

余談 実は補集合の記号には色々なものがある。 A の補集合を表すのに、 $\complement A$ とか \bar{A} とか、 A' などを用いる。高校数学では \bar{A} を用いたが、大学ではそれほどメジャーではない。(個人的には、 \bar{A} を別の意味に使いたいので、 A^c が好みである。)

ヴェン図 (Venn diagram) で表すと

参考文献

- [1] 桂田祐史：数理リテラシー Part II. 集合,
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/literacy/set.pdf>
(2013–2021).
- [2] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).