数理リテラシー 第3回
～ 論理 (3) ～

桂田 祐史

2023年4月26日

目次

連絡事項&本日の内容

- 宿題 1 について
  - 4/26 朝まで 8 割提出, 2 割未提出。順調。残り 2 割の人、5 月 1 日 13:30 までに提出よろしく。
  - 提出者中、画像のままが 3 人。早く PDF で送れるようになって下さい。PDF にパスワード設定した人が 1 名 (それでは読めない！)。

    「授業の提出物を PDF 形式で用意する方法」

    要点: (1) スマホのスキャンアプリがお勧め、(2) Mac まで持って来ればプレビューで画像→ PDF 化可能
- 本日の授業内容
  - I. 1「命題論理」の残り (§1.6.3 と §1.8「ならば」) を終えて、I. 2「述語論理」(講義ノート [1] の §2) に入る。
- 宿題 2 の提出期限は 5 月 8 日 13:30 とする。
- 質問は (i) メール (アドレスは「シラバスの補足」にある)、(ii) 宿題の余白に書く、のいずれかを使って質問して下さい。

(前回 1.6.3 は、(4) 分配律の証明 のみ講義した。)

真理値表を用いれば、次のことが証明できる (元々は無矛盾律と排中律)。

(1) $p \wedge (\neg p)$ はつねに偽

(2) $p \vee (\neg p)$ はつねに真

細かい注意 (1), (2) をそれぞれ

$$p \wedge (\neg p) \equiv \mathrm{F}, \quad p \vee (\neg p) \equiv \mathrm{T}$$

と書きたくなるかもしれない (そう書いてあるテキストもある)。うるさく言うと、$\equiv$ は 2 つの命題の真偽が一致するときに用いる記号と定義して、T や F は命題ではないので、記号の濫用である (と言う人もいる)。つねに T の真理値をもつ命題 $\top$, $\curlywedge$ や、つねに F の真理値をもつ命題 $\perp$, $\curlyvee$ を導入するテキストも多い。そうしておけば

$$p \wedge (\neg p) \equiv \curlyvee, \quad p \vee (\neg p) \equiv \curlywedge.$$

(この辺は、高校数学と違って、使用する記号が統一されているわけではない。)

1.6.3 論理の法則 (2)

以下の法則 (名前もできれば覚えて欲しい，「律」は「法則」でもよい) も真理値表を使えば証明できる。

(3) $$p \vee q \equiv q \vee p, \quad p \wedge q \equiv q \wedge p \quad (\text{交換律}).$$

(4) $$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r, \quad p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \quad (\text{結合律}).$$

記号の約束 (繰り返し)　$(p \vee q) \vee r$ を $p \vee q \vee r$, $(p \wedge q) \wedge r$ を $p \wedge q \wedge r$ と表す。

(5) $$p \vee (p \wedge q) \equiv p, \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad (\text{吸収律}).$$

(6) $$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad (\text{分配律}).$$

べき

(7) $$p \vee p \equiv p, \quad p \wedge p \equiv p \quad (\text{冪等律}).$$

(8) $$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q), \quad \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q) \quad (\text{ド・モルガン律}).$$

Cf. 高校で集合のド・モルガン律を学んだかも (この講義でも後述する)。

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

前のスライドに書いた法則は、意味を考えればすぐ納得できるものも多いが、証明を求められたら、真理値表を使って証明することを勧める。

例 3.1 (ド・モルガン律の真理値表による証明)

真理値表を用いて $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$ を示せ。

(解答)

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

第 4,7 列の真理値が一致しているので $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$. □

練習問題　真理値表を用いて $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$ を示せ。

1.8 「ならば」 ($\Rightarrow$)

命題 p, q に対して、新しい命題を表す記号 $p \Rightarrow q$ を導入する。

読み方は「p ならば q (が成り立つ)」, “If p, then q (holds).”

(テキストによっては、$p \to q$ と表すこともある。また、$p \to q$, $p \Rightarrow q$ 両方導入し、違う意味にしたりすることもある。)

次のように $p \Rightarrow q$ の真理値を定める。

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

例　「$1+1=2 \Rightarrow \pi$ は無理数」の真理値は、「$1+1=2$」と「π は無理数」のどちらの真理値も T であるから、T である。

注　数学では、普通 $\Rightarrow$ は “条件” (後で説明) について使う (例えば、x が実数 $\Rightarrow x^2 \geq 0$)。「$1+1=2$」や「π は無理数」のような命題について使うのは、違和感を感じるかもしれない。(現在の高校数学では、「ならば」は条件についてしか使っていない。)

1.8 「ならば」 ($\Rightarrow$) (続き)

(再掲 $p \Rightarrow q$ の真理値表)

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

前半の 2 行は、特に違和感は感じないであろう。

後半の 2 行は、(もしかすると) 不思議な感じがするかもしれない。

$p \Rightarrow q$ を考えるとき、p が成り立たない場合のことは考えないことが多いのでは？

p が成り立たないときは、q がどちらでも $p \Rightarrow q$ は真、と表を埋めておく (p が成り立たないときも $p \Rightarrow q$ の真偽を定める)。

実は任意の命題 p, q に対して次式が成り立つ。

(9) $$p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q \quad (\text{覚えるべき式})$$

(証明) $(\neg p) \vee q$ の真理値表を書き、前のページの $p \Rightarrow q$ と比較する。

p	q	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$	$p \Rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

(第 3 列は第 1 列から、第 4 列は第 2,3 列から求めた。第 5 列は前ページで紹介した定義である。) 第 4 列と第 5 列の真偽が一致するので、$(\neg p) \vee q \equiv p \Rightarrow q$. □

注 我々は $p \Rightarrow q$ の真偽を真理値表で与えて $p \Rightarrow q$ を定義したが、$p \Rightarrow q$ とは $(\neg p) \vee q$ のことである、として $p \Rightarrow q$ を定義するテキストもある。いずれにしても、違いは最初だけで、ここから後はどちらでも同じである。

$p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$ であるから

$$\begin{aligned}\neg(p \Rightarrow q) &\equiv \neg\left((\neg p) \vee q\right) \\ &\equiv (\neg(\neg p)) \wedge (\neg q) \\ &\equiv p \wedge (\neg q).\end{aligned}$$

ゆえに

$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\neg q) \quad \text{(覚えるべき式)}. \tag{10}$$

すなわち「p ならば q」の否定は、「p and not q」，「p かつ (q でない)」である。単に「p かつ q でない」と言うと $\neg(p \wedge q)$ のことと混同されてしまいそうなので、かっこ (　) を書いたが、苦しまぎれかもしれない。

逆接を用いて「p であるのに、q でない」と書くと、間違えにくく、覚えやすいかもしれない。— これは暗記術みたいで気が引けるけれど、「p かつ (q でない)」とかっこを使うよりは良いかもしれない。

1.8 「ならば」($\Rightarrow$)　対偶　(高校の復習？)

$p \Rightarrow q$ に対して、$q \Rightarrow p$ を**逆**、$(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ を**対偶**、$(\neg p) \Rightarrow (\neg q)$ を**裏**と呼ぶ。

練習　$(\neg q) \Rightarrow (\neg p) \equiv p \Rightarrow q$ を示せ。　(「対偶は元の命題と同値。」)

注意 3.2 (念のため確認)

$p \Rightarrow q$ と、その逆 $q \Rightarrow p$ は同値ではない。また、$p \Rightarrow q$ と、その裏 $(\neg p) \Rightarrow (\neg q)$ も同値ではない。$p \Rightarrow q$ が真であっても、逆や裏は真でないことがある (「逆は必ずしも真ならず」)。

一方、裏は「逆の対偶」であるから、逆と裏は同値である。

まず例から始める。

例 3.3

x は実数の範囲を動く変数とするとき、$x > 3$ という式は、変数 x の値を定めると命題となる。

$x = 1$ のとき、 $x > 3$ は $1 > 3$ であるから偽な命題、$x = 10$ のとき、$x > 3$ は $10 > 3$ であるから真な命題である。

このように、変数 x の値を定める (x に代入する) と命題となる式を、x についての**条件** (condition), **述語** (predicate), **命題関数**などと呼ぶ。

x についての述語を $p(x)$, $q(x)$, $\cdots$ のように表す。

(普通の関数については慣れているであろう、として以下の説明を行う。)

$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ を述語に対しても用いる。

述語に関して論じる**述語論理**では、2 つの**量称記号** (quantifier, 限定記号ともいう) $\forall$, $\exists$ が非常に重要である。

2.2 「任意の」,「すべての」, ∀

ある一定の範囲内で、何かあることが、一つの例外もなく成立する、ということがある。

例: 「三角形の内角の和は 180° である。」(平面内のすべての三角形の 3 つの内角の和は 180° である。)

つまり、次のような形の命題がしばしば現れる、ということである。

$$\left\{\begin{array}{l}\text{任意の}\\\text{すべての}\end{array}\right\}\square\text{に}\left\{\begin{array}{l}\text{対して}\\\text{ついて}\end{array}\right\}\sim\left\{\begin{array}{l}\text{が成り立つ。}\\\text{が成立する。}\\\text{である。}\\\vdots\end{array}\right\}$$

「任意の x について $p(x)$ が成り立つ」、英語では「For all x, $p(x)$ holds.」これを

$$\forall x \quad p(x)$$

と表す。

∀ は、All の頭文字 A を逆立ちさせて作った記号である。

例 3.4

$$\forall x \quad (x \text{ は実数} \Rightarrow x^2 \geq 0)$$

この例がそうであるように、多くの場合、$\forall x\ p(x)$ の $p(x)$ は、$p_1(x) \Rightarrow p_2(x)$ という形をしている。つまり

$$\forall x \quad (p_1(x) \Rightarrow p_2(x))$$

これを次のように書くことにする。

$$(\forall x : p_1(x)) \quad p_2(x)$$

これを「$p_1(x)$ を満たすようなすべての x に対して $p_2(x)$ が成り立つ」と読むと分かりやすいかもしれない。$p_1(x)$ を x についての前提条件、付帯条件のようにみなすわけである。

$$(\forall \Delta : \Delta \text{ は平面内の三角形}) \quad \Delta \text{ の 3 つの内角の和は } 180^\circ.$$

集合の記号の前倒し導入　$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

集合についてパート II で詳しく説明するが、使うと記述に便利である。

集合の記号をフライングして使う。

ものの集まりを集合という。

a が集合 A の要素であることを $a \in A$ と表す (高校で習ったはず)。

$\mathbb{N}$	自然数全体の集合	*(自然数 natural number)*
$\mathbb{Z}$	整数全体の集合	*(ドイツ語で数 Zahl)*
$\mathbb{Q}$	有理数全体の集合	*(比 quotient)*
$\mathbb{R}$	実数全体の集合	*(実数 real number)*
$\mathbb{C}$	複素数全体の集合	*(複素数 complex number)*

集合の記号を使うと、「x が実数である」ことを「$x \in \mathbb{R}$」と短く表すことができる。

書くのが面倒だと、省略記法を使いたくなる。

例 3.5

$(\forall x\colon\ x$ は実数$)\ x^2 \geq 0.$
$(\forall x\colon\ x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0.$
$(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0.$　　「任意の実数 x に対して $x \geq 0.$」

例 3.6

$$(\forall x\colon\ x > 0)\ x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

$(\forall x > 0)\ x + \dfrac{1}{x} \geq 2.$　　「任意の正の数 x に対して $x + \dfrac{1}{x} \geq 2.$」

1 つうっかりしがちな大事なことがある。
$p_1(x)$ を満たす x が 1 つも存在しないときは、$(\forall x : p_1(x))p_2(x)$ の真偽はどう定める？$\rightarrow$ これについては後述する。

2.3 ある○○が存在して…, ∃

「$p(x)$ が成り立つような x が (少なくとも 1 つ) 存在する。」

$$\text{ある } x \left\{ \begin{array}{l} \text{が存在して} \\ \text{について} \end{array} \right\} p(x) \left\{ \begin{array}{l} \text{が成り立つ。} \\ \text{が成立する。} \\ \text{である。} \\ \vdots \end{array} \right\}$$

There exists x such that $p(x)$ holds.

これを次のように表す。

$$\exists x \quad p(x)$$

∃ は exists の頭文字の大文字 E の鏡文字である。
∃ x s.t. $p(x)$ と書く人も多い。この辺は気分の問題である。

例 3.7 (方程式の実数解の存在)

方程式 $x^3 - x + 1 = 0$ の実数解 x が存在する。
ある x が存在して、x は実数かつ $x^3 - x + 1 = 0$.
$\exists x\ (x \in \mathbb{R} \wedge x^3 - x + 1 = 0)$.

この例がそうであるように、多くの場合、$p(x)$ は $p_1(x) \wedge p_2(x)$ の形をしていて、$p_1(x)$ が考察の範囲などを表している。このとき

$$\exists x \quad (p_1(x) \wedge p_2(x))$$

を次のように表す。

$$(\exists x : p_1(x)) \quad p_2(x).$$

例 3.7 (続き)

$(\exists x\colon\ x \in \mathbb{R}) \quad x^3 - x + 1 = 0$.
$(\exists x \in \mathbb{R})\ x^3 - x + 1 = 0$.
「ある実数 x が存在して、$x^3 - x + 1 = 0$.」

似た例を追加する。

例 3.8 ($\sqrt{2}$ の存在)

$\exists x \quad (x > 0 \land x^2 = 2).$
$(\exists x\colon\ x > 0) \quad x^2 = 2.$
$(\exists x > 0) \quad x^2 = 2.$
「ある正の数 x が存在して $x^2 = 2.$」

宿題 2

締め切り 5 月 8 日 (月) 13:30.

解答を A4 サイズの単一の PDF ファイルにして、Oh-o! Meiji で提出すること。

問題文は

`https://m-katsurada.sakura.ne.jp/literacy/toi2.pdf`

にある (Oh-o! Meiji のレポート課題 2)。

出題の狙い: 同値変形による証明, 量称記号 ∀, ∃ に慣れる (日本語の文を論理式に、論理式を日本語に翻訳)。

PDF ファイルは、どういう方法で作成しても構わない (お勧めはスマホのスキャンアプリ)。詳しいことは

「授業の提出物を PDF 形式で用意する方法」
`https://m-katsurada.sakura.ne.jp/how_to_pdf/`

「宿題提出についての注意」を見て下さい。

参考文献

[1] 桂田祐史：数理リテラシー Part I. 論理, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/literacy/logic.pdf (2013–2021).