

数理リテラシー 第2回

～ 論理 (2) ～

桂田 祐史

2023年4月19日

- 1 連絡事項
- 2 宿題について
- 3 前回は振り返る
- 4 命題論理
 - 「または」 (論理和), \vee
 - かっこ, 論理演算の結合の優先順位
 - 同値, 同値の証明法 (1) 真理値表による証明
 - 同値
 - 真理値表による証明
 - 論理の法則
 - 同値の証明法 (2) 同値変形による証明
 - 推移律
 - 代入
 - 例題

連絡事項

- 今回は、講義ノート [1] の §1.4~§1.7 の範囲を解説します。
間に合わないとは宿題の範囲が変わってしまうので駆け足で進めます。
- 宿題 1(問 1) を出します。〆切は 4 月 24 日 (月曜) 13:30. 今回は (初めてなので) 〆切後 1 週間までの提出を認めます。

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/literacy-2023/toi1.pdf>

宿題を解けるようにするため、このスライドに書いてあることの多くを次回に回しました。この資料を 4 月 19 日の授業内容に合致するように直すべきかもしれませんが、現在あまり時間に余裕がないので (年度初めは激忙しい)、このままにさせて下さい。

宿題について

- 授業中にプリントを配布するが、Oh-o! Meiji と授業 WWW サイトで PDF ファイルも公開する。授業に欠席した場合も、PDF を利用して取り組み、提出できる。
- ㄨ切は次回授業のある週 (普通は翌週) の月曜 13:30. それ以降も水曜 15:20 までは提出を認める (ただしフィードバックが遅くなる)。
- 提出は原則 A4 サイズの単一の PDF ファイル。PDF ファイル作成に慣れないうちは、画像フォーマット (JPEG 等) での提出も受け付けるが、なるべく早く PDF が作れるようになること。
- 添削結果を PDF ファイルで返却 (フィードバック) する。復習して下さい。
- 宿題はまじめに取り組み、ㄨ切を守って提出する限り、満点とする。ㄨ切から水曜 15:20 までの提出は半分の得点とする。
- 答を紙に書いてスキャナーやスマホアプリでスキャンして PDF を作ったり、タブレットで書いてから PDF 化したり、 \LaTeX や Word で書いた文書を PDF 化したり、どのようなやり方でも OK とする (こちらが読めて添削できることが大事で、自分がやりやすい方法でやって下さい。やり方で評価を変えたりしません。)

「授業の提出物を PDF 形式で用意する方法」

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/how_to_pdf/

前回は振り返る

(急ぐから飛ばすかも)

前回は、初回なのでこの科目のガイダンスを行い、それからパート1である「論理」の1. 命題論理に入った。

以下を説明済みである。

1.1 命題とその真偽

1.2 「でない」, \neg

1.3 「かつ」, \wedge

出席を取る。原則 $\frac{2}{3}$ 以上出席 ($14 \times \frac{2}{3} = 9.33$ ・なので 10 回以上)。(初回は全員出席だった。) 後 9 回出席すること。5 回以上欠席するとマズイ。

1.4 「または」 (論理和), \vee

2つの命題 p と q について

「 p であるか、または q である」 (p と q の少なくとも一方が成り立つ)

は命題である。

これを $p \vee q$ で表し、「 p または q 」, 「 p or q 」 と読む。

p と q の論理和、選言, logical disjunction などと呼ぶが、これらは (特に後の2つは) 覚えなくても良い。

$p \vee q$ の真理値は、次のように約束する。

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

1.4 「または」 (論理和), \vee 排他的論理和

前のページの真理値表の1行目

p が T, q が T のとき $p \vee q$ は T

に違和感があるかも。

日常語の「または」は、どちらか一方だけ (両方はダメ)、を意味することが多いかもしれない (「金の斧または銀の斧を選んで下さい」「両方」とは普通言わない)。

そういうのは**排他的論理和** (exclusive or, XOR) という。

しかし数学では、「または」は上の意味とするのが普通である。
これは数学的真理というものではなく、単に言葉・記号の約束である。

ただ、そう約束する方が便利、という理由はある。

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ または } b = 0$$

これは「または」の意味を上約束で決めるから。

もしも排他的論理和を採用すると次のようになる。

$$ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ かつ } b \neq 0) \text{ xor } (b = 0 \text{ かつ } a \neq 0) \text{ xor } a = b = 0.$$

3つの場合 $abc = 0$ でやるとどうなるか想像しよう (ごちゃごちゃして面倒)。

1.5 かっこ, 論理演算の結合の優先順位

ここまでで、 \neg , \wedge , \vee を導入した。

数式と同様に複数の演算を組み合わせた式が登場する。

演算の結合の順番を指示するため、かっこ () を用いる。

$p \vee (q \wedge r)$ と $(p \vee q) \wedge r$ は違う。

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	F
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

第5列と第7列の真理値は違うことに注目。

第1～3列の行の順番にも注目 (前回説明した辞書式順序)。

わきみち: 行と列

前ページで、「第5列」, 「第7列」と書いたが、宿題などで「第5行」, 「第7行」と書く人がいる。

横書きの場合は、「行 (row)」は横にのびているもので、縦にのびているのは「列 (column)」というのが普通である (Cf. 線形代数の行列の行と列)。

絶対というわけではないが、普通はそうしているので頭に入れておこう。

- 数式の場合、乗算 \times は加算 $+$ よりも優先するというルールを採用するのが普通で、 $(p \times q) + r$ は単に $p \times q + r$ と書かれる。

しかし

- \wedge と \vee の場合、優先順位を定めないので、つねにかっこをつけて書く。
例 $(p \wedge q) \vee r$ を $p \wedge q \vee r$ と書いたりしない(かっこ省略はルール違反)。
(\wedge を論理積, \vee を論理和というけれど、 \wedge を \vee より優先したりしない。)

一方

- \neg は、 \wedge や \vee より優先的に結合する、と約束するのが普通。

例 2.1 (\neg の結合は \wedge や \vee より強い)

$(\neg p) \vee q$ は、 $\neg p \vee q$ と書いて良い。

$\neg p \vee q$ は、 $\neg(p \vee q)$ ではなく、必ず $(\neg p) \vee q$ という意味である。

$(\neg p) \vee (\neg q)$ は、 $\neg p \vee \neg q$ と書いて良い。

この講義では、かっこは省略せず、 $(\neg p) \vee q$ と書くことが多い。この後、たくさんの記号が出て来て、それらについての順序の優先ルールを全部間違いなく覚えて使うのは、(練習時間があまり取れないので) 難しい、と考えるから。(数式の場合は、小学校以来かなり長い練習時間があつた。)

1.6 同値, 同値の証明法 (1) 真理値表による証明

1.6.1 同値

2つの命題 p と q が**同値**とは、命題の真偽が一致することである。そのことを $p \equiv q$ と表す。

例 2.2

$$1 + 1 = 2 \equiv \sin 1 < 1$$

$$\pi \text{ は有理数} \equiv 1 = 3$$

(\equiv は、数式の場合の等号 $=$ (値が一致) と似たようなものである。)

細かい話 $1 + 1 = 2 \equiv \sin 1 < 1$ は数式の混じった論理式で、 $+$, $=$, \equiv , \sin , $<$ などの広い意味の“演算子”がたくさん現れる。数式の読み方は知っているとして、 \equiv の優先順位が一番低いことは言うておくべきかもしれない。すべてかっこをつけて結合の順序を明示すると、 $((1 + 1) = 2) \equiv ((\sin 1) < 1)$ となる。

1.6.2 真理値表による証明

任意の命題 p に対して、 p と $\neg(\neg p)$ の真偽は一致する。このことを $p \equiv \neg(\neg p)$ と表せる。

このことを以下のように証明できる。

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
T	F	T
F	T	F

第1列と第3列の真偽は一致する。ゆえに $p \equiv \neg(\neg p)$ 。

これは真理値表を使わずに書くと、次のようになる。

p が T であるとき、 $\neg p$ は F であるから、 $\neg(\neg p)$ は T である。
 p が F であるとき、 $\neg p$ は T であるから、 $\neg(\neg p)$ は F である。
いずれの場合も p と $\neg(\neg p)$ の真偽は一致する。ゆえに $p \equiv \neg(\neg p)$ 。

1.6.3 論理の法則 (1)

一般に (「任意の命題 p に対して」という意味)

$$(1) \quad p \equiv \neg(\neg p)$$

以下、同様にして証明できる。

$$(2) \quad p \wedge (\neg p) \text{ はつねに偽}$$

$$(3) \quad p \vee (\neg p) \text{ はつねに真}$$

細かい注意 (2) を $p \wedge (\neg p) \equiv F$, (3) を $p \vee (\neg p) \equiv T$ と書きたくなるかもしれない (そう書いてあるテキストも多い)。うるさく言うと、 \equiv は 2 つの命題の真偽が一致するとき用いる記号で、 T や F は命題ではないので、記号の濫用である (と言う人も多い)。つねに T の真理値をもつ命題 \perp , \top や、つねに F の真理値をもつ命題 \perp , γ を導入するテキストも多い。そうしておけば

$$p \wedge (\neg p) \equiv \gamma, \quad p \vee (\neg p) \equiv \perp.$$

(高校数学と違って、使用する記号が統一されているわけではない。)

1.6.3 論理の法則 (2)

$$(4) \quad p \vee q \equiv q \vee p, \quad p \wedge q \equiv q \wedge p \quad (\text{交換律}).$$

$$(5) \quad p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r, \quad p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \quad (\text{結合律}).$$

約束 $(p \vee q) \vee r$ を $p \vee q \vee r$, $(p \wedge q) \wedge r$ を $p \wedge q \wedge r$ と表す。

$$(6) \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p, \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad (\text{吸収律}).$$

$$(7) \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad (\text{分配律}).$$

$$(8) \quad p \vee p \equiv p, \quad p \wedge p \equiv p \quad (\text{冪等律}).$$

$$(9) \quad \neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q), \quad \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q) \quad (\text{ド・モルガン律}).$$

Cf. 高校で集合のド・モルガン律を学んだかも (この講義でも後述)。

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

1.6.3 論理の法則 (3) 例題: ド・モルガン律の証明

このスライドは 4/19 の授業では説明しないかも。その場合は次回にやります。

前のスライドに書いた法則は意味を考えればすぐ納得できるものも多いが、複雑なものほどどのように確認すればよいだろう？

例題 真理値表を用いて $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$ を示せ。
(解答)

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

第 4,7 列の真理値が一致しているので $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$. □

練習問題 真理値表を用いて $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$ を示せ。

1.6.3 論理の法則 (4) 例題: 分配律の証明

例題 真理値表を用いて $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ を示せ。

練習問題 真理値表を用いて $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ を示せ。

1.6.3 論理の法則 (4) 例題: 分配律の証明

例題 真理値表を用いて $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ を示せ。
証明

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

第5, 8列が一致するので、 $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ が成り立つ。 \square

練習問題 真理値表を用いて $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ を示せ。→ 宿題

1.7 同値の証明法 (2) 同値変形による証明

1.7.1 推移律

真理値表による証明は、必ず出来る、という大きな特徴がある。

ところで数式の場合は、式変形による証明というのがある。論理式の場合も式変形による証明がある。**同値変形による証明**と呼ばれる。

以下に述べる2つの定理 (定理 2.3, 定理 2.4) が鍵となる。

定理 2.3 (推移律)

$p \equiv q$ かつ $q \equiv r$ ならば $p \equiv r$.

証明.

$p \equiv q$ かつ $q \equiv r$ と仮定する。

p が真ならば、 $p \equiv q$ より q は真である。 $q \equiv r$ より r は真である。

p が偽ならば、 $p \equiv q$ より q は偽である。 $q \equiv r$ より r は偽である。

ゆえにつねに p と r の真偽は一致する。ゆえに $p \equiv r$. □

1.7.2 代入

定理 2.4 (代入 (置き換え))

$p \equiv q$ ならば、次の (1), (2), (3) が成り立つ。

① $(\neg p) \equiv (\neg q)$

② $p \wedge r \equiv q \wedge r$

③ $p \vee r \equiv q \vee r$

証明.

上と同様である。(1)を示す。 $p \equiv q$ と仮定する。

p が真ならば、 $p \equiv q$ により q も真である。ゆえに $\neg p$, $\neg q$ は共に偽である。

p が偽ならば、 $p \equiv q$ により q も偽である。ゆえに $\neg p$, $\neg q$ は共に真である。

ゆえにつねに $\neg p$ と $\neg q$ の真偽は一致する。ゆえに $\neg p \equiv \neg q$ 。

(2), (3)は場合分けが増えるが同様である。□

1.7.3 例題

- ① 既に証明した $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ と交換律を用いて

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

を示せ。

- ② (1) の結果を用いて

$$(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$$

を示せ。

(解答) (1)

$$\begin{aligned} p \wedge (q \vee r) &\equiv (q \vee r) \wedge p && (p \wedge Q \equiv Q \wedge p \text{ の } Q \text{ に } q \vee r \text{ を代入}) \\ &\equiv (q \wedge p) \vee (r \wedge p) && (\text{与えられた分配律を用いた}) \\ &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) && (\text{交換律と同値なもので置き換え}). \end{aligned}$$

ゆえに (推移律を使って)

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

例題 (続き)

(2)

$$\begin{aligned}(p \vee q) \wedge (r \vee s) &\equiv (p \wedge (r \vee s)) \vee (q \wedge (r \vee s)) \\ &\equiv ((p \wedge r) \vee (p \wedge s)) \vee ((q \wedge r) \vee (q \wedge s)) \\ &\equiv (((p \wedge r) \vee (p \wedge s)) \vee (q \wedge r)) \vee (q \wedge s) \\ &\equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s).\end{aligned}$$

まず $r \vee s$ を一つの命題とみなして、(1) の問題文中の式

$$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge q) \vee (q \wedge r)$$

を使い、それから (1) の結果

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

を2回使い、結合律 $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ を使い、かっこを省略した。

□

(急がないでゆっくり確かめることを勧めます。)

参考文献

- [1] 桂田祐史：数理リテラシー Part I. 論理,
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/literacy/logic.pdf>
(2013–2021).