数理リテラシー 宿題 No. 9 (2022 年 7 月 6 日出題, 7 月 11 日 13:30 Oh-o! Meiji に提出)

__年__ 組____番 氏名______________ (解答は何ページでも可. 1 つの PDF にして提出)

(1) (写像に関する) 以下の言葉の定義を述べよ。(a) 単射 (b) 全射 (c) 全単射

(2) 次の (a)〜(c) の各場合について、集合 A から集合 B への写像をすべて求め、写像の総数、単射であるものの個数、全射であるものの個数、全単射であるものの個数をそれぞれ求めよ。ただし $p \neq q$ とする。

(a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ (a) $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ (c) $A = \{1, 2\}$, $B = \{p, q\}$

(3) 次の各関数 f について、単射であるかどうか、全射であるかどうか、全単射であるかどうか、それぞれ理由 (簡単で良い) をつけて答えよ。(以下は解かなくて良い。) 全単射でない場合、定義域 $X (\subset \mathbb{R})$ と終域 $Y (\subset \mathbb{R})$ を適当に小さく取って、$g\colon X \to Y$, $g(x) := f(x)$ $(x \in X)$ で定まる関数 g が全単射であるようにせよ。ただし X はなるべく幅の大きな区間を選ぶこと。条件を満たす X, Y が一通りに定まらない場合は、どれか 1 つ見つけて答えれば良い。

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ $(x \in \mathbb{R})$ (b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sinh x$ $(x \in \mathbb{R})$ (c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$

問 9 解説

(1) (a) $f\colon X \to Y$ が単射とは、$(\forall x \in X)(\forall x' \in X)\ (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$ を満たすことをいう。あるいは $(\forall x \in X)(\forall x' \in X\colon\ x \neq x')\ f(x) \neq f(x')$ としても良い。

(b) $f\colon X \to Y$ が全射とは、$(\forall y \in X)(\exists x \in X)\ y = f(x)$ を満たすことをいう。

(c) $f\colon X \to Y$ が全単射とは、f が全射かつ単射であることをいう。

それはさておき、否定を作れますか？

- $f\colon X \to Y$ が単射でない $\Leftrightarrow (\exists x \in X)(\exists x' \in X)\ (x \neq x' \wedge f(x) = f(x'))$.
  あるいは、$(\exists x \in X)(\exists x' \in X\colon\ x \neq x')\ f(x) = f(x')$ でも良い。
- $f\colon X \to Y$ が全射でない $\Leftrightarrow (\exists y \in X)(\forall x \in X)\ y \neq f(x)$.
- $f\colon X \to Y$ が全単射でない $\Leftrightarrow f$ が全射でないか f が単射でない。

(2) (a) 総数は $2^3 = 8$ 個、単射 0 個、全射 6 個, 全単射 0 個。

$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	単射	全射	全単射
4	4	4	×	×	×
4	4	5	×	○	×
4	5	4	×	○	×
4	5	5	×	○	×
5	4	4	×	○	×
5	4	5	×	○	×
5	5	4	×	○	×
5	5	5	×	×	×

($\#X > \#Y$ なので全射は存在するが単射は存在しない)

(b) 総数は $3^2 = 9$ 個、単射 ${}_3\mathrm{P}_2 = 3 \cdot 2 = 6$ 個, 全射 0 個, 全単射 0 個。

$f(1)$	$f(2)$	単射	全射	全単射
3	3	×	×	×
3	4	○	×	×
3	5	○	×	×
4	3	○	×	×
4	4	×	×	×
4	5	○	×	×
5	3	○	×	×
5	4	○	×	×
5	5	×	×	×

($\#X < \#Y$ なので単射は存在するが全射は存在しない)

(c) 総数は $2^2 = 4$ 個、単射 2 個、全射 2 個, 全単射 ${}_2\mathrm{P}_2 = 2$ 個。

$f(1)$	$f(2)$	単射	全射	全単射
p	p	×	×	×
p	q	○	○	○
q	p	○	○	○
q	q	×	×	×
p	p	×	×	×

($\#X = \#Y$ なので単射も全射も存在し、単射 $\Leftrightarrow$ 全射 $\Leftrightarrow$ 全単射)

(3) まずグラフを描くことを勧める (グラフ自体は根拠にしにくいが分かりやすくなる)。

(a)
- f は単射でない ($x = -1$, $x' = 1$ とおくと、$x, x' \in \mathbb{R}$ かつ $x \neq x'$ かつ $f(x) = f(x')$)。うんと手短に書くならば「$f(-1) = f(1)$ だから」。
- f は全射でない。($y = -1$ とおくと、$y \in \mathbb{R}$ であり、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $y = -1 < 0 \leq f(x)$ であるから $y \neq f(x)$)。
- f は全単射でない (f は単射でないから, もちろん「f は全射でないから」でも良い)。
- $X = [0, \infty)$, $Y = (0, 1]$ とすると、g は全単射である。実際、g は狭義単調減少であるから単射であり、任意の $y \in Y$ に対して ($y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ を解いて) $x = \sqrt{1/y - 1}$ とおく

と、$x \in X$ であり、$g(x) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{1/y-1}\right)^2+1} = \dfrac{1}{(1/y-1)+1} = y.$ ゆえに g は全射である。

(b)
- f は単射である (任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x} > 0$ であるので、f は狭義単調増加であるから)。
- f は全射である (実際 f は連続で、$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ であるから、中間値の定理を使えば、任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = y$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ の存在が示せる。(別解) 任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して、$x = \log(y + \sqrt{y^2+1})$ とおくと、$x \in \mathbb{R}$ かつ $f(x) = y$.
- f は全単射である (全射かつ単射であるから)。

(c)
- f は単射でない。実際 $x = 0$, $x' = \pi$ とおくと、$x, x' \in \mathbb{R}$ かつ $x \neq x'$ かつ $f(x) = 0 = f(x')$.
  手短に書くならば「$f(0) = f(\pi)$ だから」。
- f は全射でない。($y = 2$ とおくと、$y \in \mathbb{R}$ であり、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $-1 \leq f(x) \leq 1 < y$ であるから $y \neq f(x)$)。
- f は全単射でない (f は単射でないから, もちろん「f は全射でないから」でも良い)。
- $X = [-\pi/2, \pi/2]$, $Y = [-1, 1]$ とすると、g は全単射である。