数理リテラシー 宿題 No. 7　(2022 年 6 月 8 日出題, 6 月 13 日 13:30 Oh-o! Meiji に提出)

__年__ 組____番　氏名______________　　(解答は何ページでも可. 1 つの PDF にして提出)

(1) 集合 A, B が $A \subset B$ を満たすとき、$B^{\complement} \subset A^{\complement}$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 任意の集合 A, B について、$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$ が成り立つことを証明せよ。

(3) (a) 各自然数 n に対して集合 A_n が与えられているとき、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ は何か。定義を記せ。

任意の自然数 n に対して $A_n := \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{n} < x \leq 2n\right\}$ とする。

(b) A_1, A_2, A_3 を数直線上に表示せよ。

(c) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ と $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ を求めよ。余裕があれば、証明もすること。

問 7 解説

(1) $A \subset B$ が成り立つと仮定する。x を $B^{\complement}$ の任意の要素とする。実は $x \notin A$ が成り立つことを背理法を用いて示す。もしも $x \in A$ ならば、仮定 $A \subset B$ から $x \in B$. これは $x \in B^{\complement}$ であることと矛盾する。ゆえに $x \notin A$. すなわち $x \in A^{\complement}$. 従って $A \subset B$.

背理法を使える人が少ない印象がある (入試の採点とかしていても)。使えてほしい。

(こんな解答があった。) 一般に

$$\begin{aligned} A \subset B &\Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B) \\ &\Leftrightarrow \forall x (\neg (x \in B) \Rightarrow \neg (x \in A)) \quad \text{(対偶で置き換える)} \\ &\Leftrightarrow \forall x (x \in B^{\complement} \Rightarrow x \in A^{\complement}) \\ &\Leftrightarrow B^{\complement} \subset A^{\complement}. \end{aligned}$$

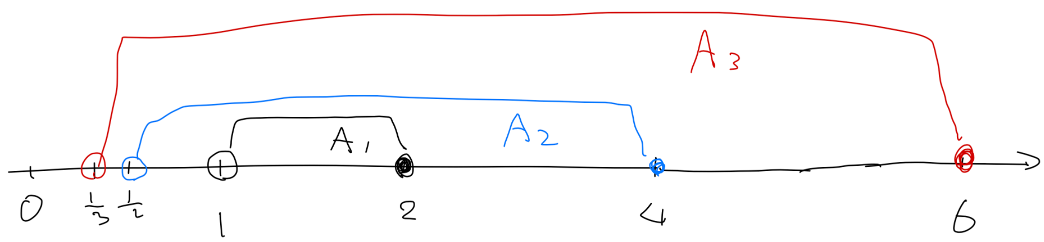
ゆえに $A \subset B$ ならば $B^{\complement} \subset A^{\complement}$. ■

(2) (これは 6/8 には出題していない。)

(3) (a) $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N})\ x \in A_n\}$, $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N})\ x \in A_n\}$.

話が通じていない人がいるけれど(こみゅにけーしょんって難しいなあ)、これは覚える。最初は見ながら写す、でもよいから書く。試験でも問われていなくても書いておくことを勧めます。

(b) 中を塗っていない丸は含まれない、中を塗ってある丸は含まれることを意味する。



(c) $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$, $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$.

区間の記号を用いると、それぞれ $(0, \infty)$, $(1, 2]$ と表せる。前者を $(0, \infty]$ と書くことは普通やらない。

証明は今回はしなくてよい、と言ってある。

(2) と、(4) の後半については、次のページ。

(2) の解答　一般に「任意の集合 X, Y に対して $X \subset X \cup Y$ が成り立つ」。実際、任意の x に対して、$x \in X$ ならば $x \in X \vee x \in Y$ が成り立つので、$X \subset X \cup Y$.

$A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$ **の証明** $A \cup B = B$ が成り立つと仮定する。一般に $A \subset A \cup B$ が成り立つので ($X = A, Y = B$ とした)、$A \subset A \cup B = B$ より $A \subset B$.

$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$ **の証明** $A \subset B$ が成り立つと仮定する。(i) 一般に $A \cup B \supset B$ が成り立つ ($X = B, Y = A$ とした)。(ii) x を $A \cup B$ の任意の要素とすると、$x \in A \vee x \in B$, $x \in A$ のときも仮定より $x \in B$ が成り立つので、つねに $x \in B$ が成り立つ。ゆえに $A \cup B \subset B$.

(i), (ii) より $A \cup B = B$. ■

(4) 後半

$\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$ **の証明** $B := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ とおく。任意の x に対して

(i) $x \in \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ならば、ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して、$x \in A_n$. ゆえに $\frac{1}{n} < x \leq 2n$. $\frac{1}{n} > 0$ であるから、$x > 0$. ゆえに $x \in B$.

(ii) $x \in B$ ならば、$x > 0$. アルキメデスの公理から、ある $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ が存在して、$n_1 x > 1$ かつ $n_2 \cdot 1 > x$. ゆえに $\frac{1}{n_1} < x < n_2$. $n := \max\{n_1, n_2\}$ とすると、$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_1}$ かつ $2n \geq n \geq n_2$ であるから、$\frac{1}{n} < x < 2n$. ゆえに $x \in A_n$. ゆえに $x \in \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

(i), (ii) より $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = B$. ■

$\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1$ **の証明** 任意の x に対して

(a) $x \in \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ならば、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$x \in A_n$. 特に $n = 1$ のとき成り立つので、$x \in A_1$.

(b) $x \in A_1$ ならば、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$x \in A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n$ であるから $x \in A_n$. ゆえに $x \in \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

(a), (b) より $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1$. ■