数理リテラシー 宿題 No. 10　(2022年7月13日出題, 7月18日13:30 Oh-o! Meiji に提出)

__年__ 組____番　氏名____________　　(解答は何ページでも可. 1つのPDFにして提出)

(1) 次の各関数 f について、定義域 $X(\subset \mathbb{R})$ と終域 $Y(\subset \mathbb{R})$ を適当に小さく取って、$g\colon X \to Y$, $g(x) := f(x)$ $(x \in X)$ で定まる関数 g が全単射であるようにせよ。ただし X はなるべく幅の大きな区間を選ぶこと。X, Y が一通りに定まらない場合は、どれか1つ見つけて答えれば良い。

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ $(x \in \mathbb{R})$　(c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$

(2) $f\colon X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$ とする。$f(A)$, $f^{-1}(B)$ の定義を記せ。それぞれ何と呼ばれるか。

(3) $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \sin x$ $(x \in [-\pi, \pi])$ で定めるとき，以下の問に答えよ。

(a) f の逆写像 f^{-1} は存在しない。その理由を述べよ。

(b) $f\left(\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}\right)$,　$f(\{0, \pi\})$,　$f\left(\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$,　$f^{-1}\left(\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\right)$,　$f^{-1}(\{2\})$,　$f^{-1}\left(\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]\right)$ を求めよ (f を含まない式で表せ)。

問10解説

(1) (a) f は単射ではない ($\because f(1) \neq f(-1)$)。f は $[0, \infty)$ で狭義単調減少、$(-\infty, 0]$ で狭義単調増加であるから、$X := [0, \infty)$ と選ぶと g は単射であり、$f(X) = \left\{ \frac{1}{x^2+1} \,\middle|\, x \geq 0 \right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y \leq 1\} = (0, 1]$. X をそれより大きく選ぶと g は単射にはならない。$Y := (0, 1]$ とすると g は全単射である。　$X = [0, \infty)$, $Y = (0, 1]$.

(注) $X = (-\infty, 0]$, $Y = (0, 1]$ と選ぶことも可能である。

(b) f は単射でない ($\because f(0) = f(\pi)$)。f は、任意の整数 n について、$[2n\pi - \pi/2, 2n\pi + \pi/2]$ では単調増加、$[(2n-1)\pi - \pi/2, (2n-1)\pi + \pi/2]$ では単調減少であるから、π より幅の大きな区間では f は狭義単調増加でも狭義単調減少でもない。$X := [-\pi/2, \pi/2]$ と選ぶと、g は単射であり、$f(X) = \{\sin x \mid x \in [-\pi/2, \pi/2]\} = [-1, 1]$. $Y := [-1, 1]$ とすると g は全単射である。　$X = [-\pi/2, \pi/2]$, $Y = [-1, 1]$.

(注) X の選び方は他にも色々ある。

(2)

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \quad f \text{ による } A \text{ の像 } (A \text{ の } f \text{ による像}),$$
$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \quad f \text{ による } B \text{ の逆像 } (B \text{ の } f \text{ による逆像}).$$

(3) (a) f は単射でない ($\because f(0) \neq f(\pi)$) ので、$f$ は全単射でないから。

(b)

$$f\left(\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right) = \left\{f(x) \,\middle|\, x \in \left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right\} = \left\{f(x) \,\middle|\, x = \frac{\pi}{2}\right\} = \left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \left\{\sin\frac{\pi}{2}\right\} = \{1\},$$
$$f(\{0, \pi\}) = \{f(x) \mid x \in \{0, \pi\}\} = \{f(x) \mid x = 0 \lor x = \pi\} = \{\sin 0, \sin \pi\} = \{0\},$$
$$f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left\{f(x) \,\middle|\, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\} = \left\{f(x) \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\} = [-1, 1],$$
$$f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{x \in [-\pi, \pi] \,\middle|\, f(x) = \frac{1}{2}\right\} = \left\{x \in [-\pi, \pi] \,\middle|\, \sin x = \frac{1}{2}\right\} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\},$$
$$f^{-1}(\{2\}) = \{x \in [-\pi, \pi] \mid f(x) = 2\} = \{x \in [-\pi, \pi] \mid \sin x = 2\} = \emptyset,$$
$$f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 2\right]\right) = \left\{x \in [-\pi, \pi] \,\middle|\, f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]\right\} = \left\{x \in [-\pi, \pi] \,\middle|\, \frac{1}{2} \leq \sin x \leq 2\right\}$$
$$= \left\{x \in [-\pi, \pi] \,\middle|\, \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}\right\} = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right].$$