2016 年度 数理リテラシー 期末試験問題

2016 年 7 月 28 日 (木曜) 9:00〜11:00 施行, 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2 枚) のみ提出

1.　次の各文を記号のみを用いて表せ。
(1) 「p または q」の否定は、「p ではなく、q でもない」である。
(2) $-\pi i$ は複素数であるが実数ではなく、$-\pi$ は実数であるが有理数でなく、$-\dfrac{22}{7}$ は有理数であるが整数でなく、-3 は整数であるが自然数でない。
(3) A と B の和集合と C との共通部分は、A と C の共通部分と、B と C の共通部分の和集合に等しい。
(4) 任意の実数 x に対して、x より大きい実数 y が存在する。
(5) 写像 f による集合 A の像が、写像 g による集合 B の逆像に含まれる。

2.　(1) 命題論理の分配律 $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ を真理値表を用いて証明せよ。(2) 同値変形によって、

$$(*) \qquad (p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$$

を証明せよ。

3.　次の (1), (2) の命題を、論理式で表し、真ならばそれを証明し、偽ならばその否定命題を証明せよ。

(1) ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して、$y^2 > x$ が成り立つ。

(2) 任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して、$xy = 1$ が成り立つ。

4.　(1) A と B を集合とするとき、$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$ の定義を書け。また、それぞれ何と呼ぶか。
(2) A を集合とするとき、A^c, 2^A の定義を書け (全体集合は X とする)。また、それぞれ何と呼ぶか。
(3) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ とするとき、$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$, 2^A を求めよ。

5.　次の (1), (2) を証明せよ。
(1) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (\forall \varepsilon > 0) |x| < \varepsilon\}$ とおくとき $A = \{0\}$. (2) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (\forall y \in \mathbb{R})\ x > y\}$ とおくとき $B = \emptyset$.

6.　(1) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を集合族とするとき、$\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ の定義を書け。
(2) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \dfrac{1}{n} \le x \le 2n\right\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とするとき、$\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, を求めよ (証明もすること)。

7.　(1) 写像について次の言葉の定義を述べよ。(a) 単射　(b) 全射　(c) 全単射　(2) $f \colon X \to Y$, $g \colon Y \to Z$ とするとき、以下の (a), (b) を証明し、(c) の反例を書け。　(a) $g \circ f$ が単射であれば f は単射である。
(b) $g \circ f$ が全射であれば g は全射である。　(c) $g \circ f$ が単射であれば g は単射である。　(3) $f \colon X \to Y$, $g \colon Y \to X$ が $g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ を満たすならば、f と g は全単射であることを示せ。

8.　(1) $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ で定めた f が全単射でないことを示せ。また $X \subset \mathbb{R}$ と $Y \subset \mathbb{R}$ をなるべく大きく取って、$g \colon X \to Y$, $g(x) = f(x)$ $(x \in X)$ で定めた g が全単射になるようにせよ。
(2) 空でない集合 X, Y に対して、写像 $f \colon X \times Y \to X$ を $f((x, y)) = x$ $((x, y) \in X \times Y)$ で定めるとき、f の値域を求めよ。

9.　$f \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \sin x$ $(x \in [-\pi, \pi])$ で定めるとき，以下の問に答えよ。
(1) f の逆写像 f^{-1} は存在しない。その理由を述べよ。　(2) $A \subset [-\pi, \pi]$, $B \subset \mathbb{R}$ に対して、$f(A)$, $f^{-1}(B)$ の定義を記せ。それぞれ何と呼ばれるか。　(3) 次の各集合を求めよ (f を含まない式で表せ)。

$$f\left(\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right), \quad f\left(\{0, \pi\}\right), \quad f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right), \quad f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right), \quad f^{-1}\left(\{2\}\right), \quad f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 2\right]\right)$$

解答と解説

1. (1) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$ (2) $-\pi i \in \mathbb{C} \wedge -\pi i \notin \mathbb{R} \wedge -\pi \in \mathbb{R} \wedge -\pi \notin \mathbb{Q} \wedge -\frac{22}{7} \in \mathbb{Q} \wedge -\frac{22}{7} \notin \mathbb{Z} \wedge -3 \in Z \wedge -3 \notin \mathbb{N}$ (3) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (4) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ y > x$ (5) $f(A) \subset g^{-1}(B)$

2.

(1) 真理値表は次のようになる。

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

5 列目と 8 列目の真偽が一致するので、$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.

(2) 交換法則が成り立つので、

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (q \vee r) \wedge p \equiv (q \wedge p) \vee (r \wedge p) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \tag{$\sharp$}$$

が成り立つことに注意する。

$$\begin{aligned}
(p \vee q) \wedge (r \vee s) &\equiv (p \wedge (r \vee s)) \vee (q \wedge (r \vee s)) && \text{((1) による)} \\
&\equiv ((p \wedge r) \vee (p \wedge s)) \vee ((q \wedge r) \vee (q \wedge s)) && \text{(($\sharp$) による)} \\
&= (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s) && \text{(結合法則による)}.
\end{aligned}$$

3.

(1) $(\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ y^2 > x$.

これは真である。(証明) $x = -1$ とおくと、x は実数であり、任意の実数 y に対して、$y^2 \geq 0 > -1 = x$ より $y^2 > x$.

(2) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ xy = 1$.

これは偽である。否定命題は $(\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ xy \neq 1$. (証明) $x = 0$ とすると、x は実数であり、任意の実数 y に対して $xy = 0 \cdot y = 0 \neq 1$. ゆえに $xy \neq 1$. ■

4.

(1)

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	A と B の和集合 (合併集合)
$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$	A と B の積集合 (共通部分)
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	A と B の差集合
$A \times B = \{z \mid (\exists x \in A)(\exists y \in B) z = (x, y)\}$	A と B の直積集合

(2) $A^c = X \setminus A$ を A の補集合、$2^A = \{C \mid C \subset A\}$ を A のベキ集合と呼ぶ。

(3)

$$\begin{aligned}
&A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A \cap B = \{2, 3\}, \quad A \setminus B = \{1\}, \\
&A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}, \\
&2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{3,1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}. \blacksquare
\end{aligned}$$

5.

(1) (a) $x \in A$ とすると、$x \in \mathbb{R}$ かつ $(\forall \varepsilon > 0)\ |x| < \varepsilon$. $x = 0$ を背理法で示すため、$x \neq 0$ と仮定すると、$|x| > 0$. これから ($\varepsilon = |x|$ として適用して) $|x| < |x|$. これは矛盾である。ゆえに $x = 0$. ゆえに $x \in \{0\}$.

(b) $x \in \{0\}$ とすると、$x = 0$. もちろん $x \in \mathbb{R}$. 任意の正数 ε に対して、$|x| = |0| = 0 < \varepsilon$ より $|x| < \varepsilon$. ゆえに $x \in A$.

(a), (b) より $A = \{0\}$.

(2) 背理法で示すため、$B \neq \emptyset$ と仮定すると、B の要素 x が存在する。$x \in \mathbb{R}$ であり、

$$(\flat) \qquad (\forall y \in \mathbb{R}) \quad x > y.$$

$y' := x + 1$ とおくと、$y' \in \mathbb{R}$ かつ $y' > x$. これは $(\flat)$ と矛盾する。ゆえに $B = \emptyset$. ■

6.

(1) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}$.

(2) 最初に $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ のとき $A_n \supset A_m$ であることを注意しておく。

実は $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$.

(証明) (a) $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とすると、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$x \in A_n$. 特に $n = 1$ として、$x \in A_1$.

(b) $x \in A_1$ とすると、任意の自然数 n に対して、$x \in A_n$ ($n = 1$ のときは明らか。$n \geq 2$ のとき、$A_n \supset A_1$ であるから $x \in A_n$.) ゆえに $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

また $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

(証明) (a) $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とすると、$x \in A_n$ となる自然数 n が存在する。このとき $\frac{1}{n} \leq x \leq n$. $\frac{1}{n} > 0$ であるから $x > 0$. ゆえに $x \in (0, \infty)$.

(b) $x \in (0, \infty)$ とする。

- $1, x > 0$ であるから、アルキメデスの公理を用いて、$N_1 \cdot 1 > x$ を満たす自然数 N_1 が存在する。
- $x, 1 > 0$ であるから、またアルキメデスの公理を用いて、$N_2 \cdot x > 1$ を満たす自然数 N_1 が存在する。

$N := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、N は自然数であり、$N > x$ かつ $Nx > 1$. ゆえに $\frac{1}{N} \leq x \leq N \leq 2N$. ゆえに $x \in A_N$. ゆえに $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(a), (b) から $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (0, \infty)$. ■

7.

(1) $f\colon X \to Y$ とする。

(a) f が単射とは、$(\forall x \in X)(\forall x' \in X)\ (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$ が成り立つことをいう。この条件は $(\forall x \in X)(\forall x' \in X)\ (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$ と同値である。

(b) f が全射とは、$(\forall y \in Y)\ (\exists x \in X)\ y = f(x)$ が成り立つことをいう。

(c) f が全単射とは、f が全射かつ単射であることをいう。

(2) (a) $g \circ f$ が単射と仮定する。$x, x' \in X$, $f(x) = f(x')$ とすると、$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = g \circ f(x')$. $g \circ f$ が単射という仮定から、$x = x'$. ゆえに f は単射である。

(b) $g \circ f$ が全射と仮定する。任意の $z \in Z$ に対して、$g \circ f(x) = z$ を満たす $x \in X$ が存在する。このとき $y := f(x)$ とおくと、$y \in Y$ であり、

$$g(y) = g\left(f(x)\right) = g \circ f(x) = z.$$

ゆえに g は全射である。

(c) $X = \{1\}$, $Y = \{1, 2\}$, $Z = \{1\}$, $f(1) = 1$, $g(1) = 1$, $g(2) = 1$ として、写像 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を定めると、g は単射でないが、$g \circ f$ は単射である。

(3) 一般に恒等写像は全単射であることに注意する。

$g \circ f = \mathrm{id}_X$ は全単射ゆえ、g は全射かつ f は単射である (それぞれ (2)-(b),(2)-(a) を用いる)。

同様に $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ は全単射ゆえ、f は全射かつ g は単射である (それぞれ (2)-(b),(2)-(a) を用いる)。

以上より、f と g は全単射である。■

8.

(1) f は全射でない ($y = 0$ とすると、$y \in \mathbb{R}$ であるが、$f(x) = y$ ($\Leftrightarrow e^x = 0$) を満たす実数 x は存在しない)。ゆえに f は全単射でない。

$X = \mathbb{R}$, $Y = (0, \infty)$ とすると、g は全単射である。($g'(x) = e^x > 0$ より g は狭義単調増加であるから、g は単射である。一方、g は連続であり、$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$, $\displaystyle\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$ であるから、中間値の定理により、任意の $y > 0$ に対して、$g(x) = y$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ が存在するので、g は全射である。)

(2) $f(X \times Y) = \{f\left((x, y)\right) \mid (x, y) \in X \times Y\} = \{x \mid (x, y) \in X \times Y\} = \{x \mid x \in X\} = X.$ ■

9.

(1) f は単射でない ($f(0) = f(\pi)$ であるから)。ゆえに f は全単射でないので、f の逆写像は存在しない。

(2) $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ を f による A の像と呼ぶ。$f^{-1}(B) = \{x \in [-\pi, \pi] \mid f(x) \in B\}$ を f による B の逆像と呼ぶ。

(3)

$$\begin{aligned}
&f\left(\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right) = \left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \{1\}, \\
&f\left(\{0, \pi\}\right) = \{f\left(0\right), f\left(\pi\right)\} = \{0, 0\} = \{0\}, \\
&f\left([-\pi/2, \pi/2]\right) = \{\sin x \mid x \in [-\pi/2, \pi/2]\} = [-1, 1], \\
&f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{x \in [-\pi, \pi] \,\middle|\, \sin x = \frac{1}{2}\right\} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}, \\
&f^{-1}\left(\{2\}\right) = \{x \in [-\pi, \pi] \mid \sin x = 2\} = \emptyset, \\
&f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 2\right]\right) = \left\{x \in [-\pi, \pi] \,\middle|\, \frac{1}{2} \leq \sin x \leq 2\right\} = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]. \blacksquare
\end{aligned}$$