

数理リテラシー 第7回

～ 集合 (2) ～

桂田 祐史

2022年6月1日

目次

- ① 本日の内容&連絡事項
- ② 集合 (続き)
 - 包含関係 ($A \subset B$), 部分集合
 - 空集合 (\emptyset)
 - 順序対と直積集合 ($A \times B$)
 - ベキ集合 (2^A)
 - 集合族
 - 集合についての定理, それらの証明
- ③ 参考文献

本日の内容&連絡事項

- 6月22日(水曜)の授業で中間試験を行います。試験範囲は前の週に発表しますが、今のところ論理と集合の全範囲の予定です。形式等については過去問を参照して下さい。
- 宿題5(問5)の解説を行います。
- 本日の授業内容: 集合の基本(包含関係、空集合, 直積集合, 冪集合), 集合族(特に無限集合族の合併と共通部分), 集合についての定理の証明(講義ノート桂田 [1] の §3.5 以降)。後半は少し難しく感じるかもしれません。

3.5 包含関係 (\subset), 部分集合

定義 7.1 (含まれる, 含む, 部分集合)

A, B は集合とする。

$$\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B) \quad (\text{これは } (\forall x \in A) x \in B \text{ とも書ける})$$

が成り立つとき、「 A は B に**含まれる**」、「 B は A を**含む**」、「 A は B の**部分集合** (a subset of B)」といい、

$$A \subset B \quad \text{あるいは} \quad B \supset A$$

で表す。また、その否定を $A \not\subset B$ あるいは $B \not\supset A$ で表す。

$A \subset B$ かつ $A \neq B$ であることを $A \subsetneq B$ と表し、 A は B の**真部分集合** (proper subset of B) であるという。

3.5 包含関係 (\subset), 部分集合

例 7.2

$$\{1\} \subset \{1, 2\}, \quad \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}.$$

これを次のようにまとめて書くことも多い。

$$\{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}.$$

$$\{1\} \not\subset \{2\}.$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

$$\{x \mid x \text{ は正三角形}\} \subset \{x \mid x \text{ は二等辺三角形}\}.$$

3.5 包含関係 (\subset), 部分集合

定理 7.3 (包含関係は半順序関係)

A, B, C を任意の集合とするとき、次の (1), (2), (3) が成立する。

- ① $A \subset A$.
- ② $A \subset B$ かつ $B \subset C$ ならば $A \subset C$.
- ③ $A \subset B$ かつ $B \subset A$ ならば $A = B$.

証明

- ① 任意の x に対して、 $x \in A$ ならば $x \in A$. ゆえに $A \subset A$.
($p \Rightarrow p$ は $\neg p \vee p$ であるからつねに真である。)
- ② x を A の任意の要素とする。 $A \subset B$ より $x \in B$. $B \subset C$ より $x \in C$. ゆえに $A \subset C$.
- ③ 任意の x に対して
 - $x \in A$ ならば $A \subset B$ より $x \in B$.
 - $x \in B$ ならば $B \subset A$ より $x \in A$.

ゆえに $(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)$ は真であるから $A = B$.

3.5 包含関係 (\subset), 部分集合 余談

上の定理を見て、 \subset は、実数の場合の \leq と似ていると思うかもしれない。

- ① $a \leq a$.
- ② $a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば $a \leq c$.
- ③ $a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば $a = b$.

数の場合は、任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して、 $a \leq b$ か $b \leq a$ の少なくとも一方が成り立つが、 \subset については成り立たない。

\subset は**半順序関係**というものになっている(詳しいことは略)。

A が B の部分集合であることを $A \subseteq B$, A が B の真部分集合であることを $A \subset B$ と書く流儀もある。これは \leq と $<$ みたいで、それなりに納得感がある。

\subset という記号はどちらの意味であるか(部分集合?それとも真部分集合?)、注意が必要である。(最近は、この授業で採用した定義が主流のように思われるが…)

3.6 空集合 (\emptyset)

要素を1つも持たない集合を**空集合** (empty set) とよび、 \emptyset あるいは \varnothing で表す。

元々は、ゼロ 0 や丸 \circ に $/$ を重ねたものだそうで、ギリシャ文字のファイ ϕ とは関係がない。

命題 7.4 (空集合は任意の集合の部分集合である)

任意の集合 A に対して $\emptyset \subset A$.

証明.

A を任意の集合とする。任意の x に対して、 $x \in \emptyset$ は偽であるから

$$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$$

は真である。ゆえに $\emptyset \subset A$. □

復習 p が偽のとき、(q の真偽が何であっても) $p \Rightarrow q$ は真である。

3.6 空集合 (\emptyset) 少し考えてみよう

$\emptyset \subset A$ を論理式で表した $\forall x(x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$ は

$$(\forall x \in \emptyset) x \in A$$

とも書ける。これが真であるわけだが、納得できるだろうか？

\emptyset の各メンバー (要素) x に、 $x \in A$ を満たすかどうか試験をして、全員合格なので $\emptyset \subset A$ が成り立つ、ということだが、メンバーが1人もいないわけである。

たとえ話になるが、受験生がいないテストは全員合格だろうか？

受験生がいなければ、合格にならない人はいないので、全員合格である、と言うと屁理屈に聞こえないだろうか？

$\forall x P(x)$ は「すべての x について $P(x)$ が成り立つ」と日本語訳するけれど、 $P(x)$ が成り立たないような x は存在しない、という意味である。

これは言葉の約束である。

3.9 順序対と直積集合 ($A \times B$)

定義 7.5 (順序対と直積集合)

2つの対象 a, b が与えられたとき、順序を考えた組 (a, b) を a と b の**順序対** (ordered pair) と呼ぶ。(要するに**点の座標や数ベクトルと同様**のことを、数でない場合に拡張する、ということである。)

順序対の相等は (当然) 次のように定める。

$$(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \wedge b = d.$$

A と B が集合のとき、 A の要素と B の要素の順序対の全体を $A \times B$ で表し、 A と B の**直積集合** と呼ぶ。

$$\begin{aligned} A \times B &:= \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\} \\ &= \{c \mid (\exists a \in A)(\exists b \in B) c = (a, b)\}. \end{aligned}$$

3.9 順序対と直積集合

例 7.6

$$(x, y) = (1, 2) \Leftrightarrow x = 1 \wedge y = 2.$$

$$(1, 2) \neq (2, 1), \quad (1, 1) \neq 1.$$

Cf. 集合と対比してみよう。 $\{1, 2\} = \{2, 1\}$, $\{1, 1\} = \{1\}$. 全然違う。

例 7.7

(x, y はすでに定まっているとして) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$ のとき

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}.$$

例 7.8

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \mid x \text{ と } y \text{ は実数}\}.$$

これを \mathbb{R}^2 と表すこともある。2次元ベクトルの全体とみなせる。 □

3.10 ベキ集合 (2^A)

定義 7.9 (ベキ集合)

集合 A に対して、 A のすべての部分集合の集合を、 A の**ベキ集合** (漢字で書くと^{べき}**幂集合**, the power set of A) と呼び、 2^A や $\mathcal{P}(A)$, $P(A)$ などの記号で表す。

$$2^A = \mathcal{P}(A) := \{B \mid B \text{ は } A \text{ の部分集合}\} = \{B \mid B \subset A\}.$$

例 7.10

$$A = \{1\} \text{ のとき、 } 2^A = \{\emptyset, \{1\}\}.$$

例 7.11

$$B = \{1, 2\} \text{ のとき、 } 2^B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

例 7.12

$A = \{a\}$ のとき、 $B = 2^A$, $C = 2^B$ を求めよ。

$$B = 2^A = \{\emptyset, \{a\}\}.$$

$$C = 2^B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}\}.$$

解説 $B = \{p, q\}$ のとき、 $2^B = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$ となることは既に見た。これに $p = \emptyset$, $q = \{a\}$ を代入する。 □

3.10 ベキ集合

これは省略するかも。

例 7.13

$C = \{a, b\}$ のとき

$$(\heartsuit) \quad 2^C = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

$a = 1$ かつ $b = 2$ のとき、 $C = \{1, 2\}$ で、当然

$$2^C = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

$a = b = 1$ のとき、 $C = \{1\}$ である。(♡) に $a = b = 1$ を代入すると

$$2^C = \{\emptyset, \{1\}, \{1\}, \{1, 1\}\} = \{\emptyset, \{1\}\} = 2^A, \quad A := \{1\}.$$

集合の外延的表記のルールとして、要素を重複して書いても良いとしてあることに注意しよう。もしそういうルールにしておかないと、(♡) は正しくない場合があることになる。

3.11 集合族

要素が集合である集合 (集合の集合) を**集合族** (a family of sets) という。「族」の代わりに「類」 (class) を使うこともある。

例. $A = \{\{1\}, \{1, 2, 3\}\}$ 2つの集合 $\{1\}$, $\{1, 2, 3\}$ からなる集合

例. A を集合として、 $A = 2^A$ (A のベキ集合).

ここで A は A のカリグラフィック・フォント (の1つ) である。

(これまで、集合は大文字 (capital letters, upper case), その要素は小文字 (small letters, lower case) で表すという慣習に従ってきた。集合族を表す文字をどうするか迷うところだが、カリグラフィック・フォントで書く人が結構いるので、真似してみた。)

無限個の集合からなる集合族の和集合 (合併集合)、積集合 (共通部分) に慣れることを目標とする (頻出するので必要)。特に自然数で番号をつけられる集合 A_1, A_2, \dots に対して、和集合 (合併集合) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, 積集合 (共通部分) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ を扱う (この方針は、教科書 中島 [2] と同じ)。

2022年6月1日の授業はここまででした。以下のスライドに書いてあることは次回説明します。

3.11 集合族 有限個の集合の和集合と積集合

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ の話をするための前フリ

集合 A_1, A_2, \dots, A_n があるとき、次のように定める。

$$\bigcup_{k=1}^n A_k := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, \quad \bigcap_{k=1}^n A_k := A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n.$$

($\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \dots + a_n$ の真似)

後のために整理しておく。

$$x \in \bigcup_{k=1}^n A_k \Leftrightarrow x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \dots \vee x \in A_n$$

\Leftrightarrow

$$x \in \bigcap_{k=1}^n A_k \Leftrightarrow x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots \wedge x \in A_n$$

\Leftrightarrow

3.11 集合族 可算無限個の集合の和集合と積集合

すべての自然数 n に対して集合 A_n が与えられているとき、
和集合 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ($\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とも書く), 積集合 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ($\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ とも書く) を
次のように定める。

$$(1) \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n := \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}.$$

$$(2) \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n := \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}.$$

極限により定義するのではない!

(1), (2) はしっかり覚える

3.11 集合族 可算無限個の集合の和集合と積集合

各例で $n = 1, 2, 3$ に対して A_n を図示して、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\bigcup_{k=1}^n A_k, \bigcap_{k=1}^n A_k$ を

求めてみよう。 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ が分かるかな？

例

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \right\} \text{ とするとき、 } \bigcup_{k=1}^n A_k = A_1, \bigcap_{k=1}^n A_k = A_n.$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 = (-1, 1), \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}.$$

例 $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid -n < x < n\}$ とするとき、 $\bigcup_{k=1}^n A_k = A_n, \bigcap_{k=1}^n A_k = A_1$.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}, \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 = (-1, 1).$$

例 $A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -n < x < \frac{1}{n} \right\}$ とするとき、 $\bigcup_{k=1}^n A_k = (-n, 1), \bigcap_{k=1}^n A_k = (-1, 1/n)$.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = (-\infty, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}, \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = (-1, 0).$$

3.12 集合についての定理, それらの証明

定理 7.14 (これで全部という訳でもないけれど)

以下 X は全体集合であり、 A, B, C は X の部分集合とする。

- ① $A \subset A$ (反射律), $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (推移律),
 $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$ (反対称律)
- ② $A \cap A = A, A \cup A = A$ (冪等律)
- ③ $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$ (交換律)
- ④ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (結合律)
- ⑤ $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A, A \cap X = A, A \cup X = X$
- ⑥ $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (分配律)
- ⑦ $(A \cup B) \cap A = A, (A \cap B) \cup A = A$ (吸収律)
- ⑧ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (ド・モルガン律)
- ⑨ $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B, A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

3.12 集合についての定理, それらの証明

高校では、**ヴェン図** (Venn diagram) を描いて考えた。前のスライドに載せた命題が正しいことは、ヴェン図を描けば「わかる」であろう。

この講義では、ヴェン図を考えるとときの参考にするけれど、ヴェン図を使った説明は証明にはならない、というスタンスで進める。(無限個の要素からなる集合族については、ヴェン図も正確には描きようがないし、実は4個くらいから困難になってくる。)

以下の定義が基礎となる。

- ① $A = B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)) \wedge (\forall x(x \in B \Rightarrow x \in A))$
- ② $A \subset B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$
- ③ $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A^c, A \times B, 2^A, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ などの定義

例 7.15

集合 A, B, C が $A \subset B, B \subset C$ を満たすとき、 $A \subset C$ が成り立つことを示せ。

(証明) $A \subset B, B \subset C$ を仮定する。

x を A の任意の要素とする。 $A \subset B$ であるから $x \in B$. $B \subset C$ であるから $x \in C$. ゆえに $A \subset C$.

例 7.16

集合 A, B, C, D が $A \subset B, C \subset D$ を満たすとき、 $A \times C \subset B \times D$ が成り立つことを証明せよ。

(証明) $A \subset B, C \subset D$ を仮定する。 x を $A \times C$ の任意の要素とすると、ある $a \in A, c \in C$ が存在して $x = (a, c)$. $A \subset B$ であるから、 $a \in B$. $C \subset D$ であるから $c \in D$. ゆえに $x = (a, c) \in B \times D$. 従って $A \times C \subset B \times D$. □

3.12 集合についての定理, それらの証明

分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ の証明

任意の x に対して

$$\begin{aligned}x \in (A \cup B) \cap C &\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge x \in C \\&\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C \\&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \\&\Leftrightarrow (x \in A \cap C) \vee (x \in B \cap C) \\&\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)\end{aligned}$$

が成り立つから、 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. □

ド・モルガン律 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ の証明

任意の x に対して

$$\begin{aligned}x \in (A \cup B)^c &\Leftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \\&\Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \\&\Leftrightarrow (\neg(x \in A)) \wedge (\neg(x \in B)) \\&\Leftrightarrow (x \in A^c) \wedge (x \in B^c) \\&\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c\end{aligned}$$

が成り立つから、 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. □

3.12 集合についての定理, それらの証明

空集合であることの証明は、知らない戸惑いそうなので、一つ例をあげておく。

$A \cap A^c = \emptyset$ を示せ。

証明 1 背理法を用いて証明する。 $A \cap A^c \neq \emptyset$ と仮定すると、ある x が存在して $x \in A \cap A^c$. ゆえに $x \in A$ かつ $x \in A^c$. すなわち $x \in A$ かつ $x \notin A$. これは矛盾である。ゆえに $A \cap A^c = \emptyset$. \square

証明 2 (本質的には同じことであるが)

$$A \cap A^c = \{x \mid x \in A \wedge x \in A^c\} = \{x \mid x \in A \wedge x \notin A\}.$$

任意の x に対して $x \in A \wedge x \notin A$ は偽である。言い換えると、条件 $x \in A \wedge x \notin A$ を満たす x は存在しない。ゆえに $A \cap A^c = \emptyset$. \square

3.12 集合についての定理, それらの証明

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ を証明しよう。

準備として、一般に

$$(\#) \quad A \cap B \subset B$$

が成り立つことを注意する (上の定理に入っていない)。実際、 $x \in A \cap B$ とすると、 $x \in A$ かつ $x \in B$. 特に $x \in B$ であるから、 $A \cap B \subset B$. \square

$A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$ の証明

$A \cap B = A$ と仮定する。上で注意したように、一般に $A \cap B \subset B$ が成り立つので、仮定と合わせて $A = A \cap B \subset B$. ゆえに $A \subset B$. \square

$A \cap B = A \Leftarrow A \subset B$ の証明

① $A \subset B$ と仮定すると、 $A \subset A \cap B$ (実際、 $x \in A$ とするとき、仮定から $x \in B$ が成り立つので、 $x \in A \wedge x \in B$, すなわち $x \in A \cap B$ が成り立つ。).

② 一方、一般に $A \cap B \subset A$ が成り立つ (やはり (#) を使う)。

(i), (ii) から $A \cap B = A$ が成り立つ。 \square

参考文献

- [1] 桂田祐史：数理リテラシー Part II. 集合,
<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/set.pdf>
(2013–2021).
- [2] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).