数理リテラシー 第4回

～ 論理 (4) ～

桂田 祐史

2022 年 5 月 11 日

目次

1. 連絡事項＆本日の内容
2. 宿題について
3. 宿題 1
4. 述語論理 (続き)
   - ある〇〇が存在して…, ∃
   - 複数の量称を含む命題
     - 複数の変数を含む述語
     - 2 つの変数を持つ述語に 2 つの量称記号をつける
     - 慣れるための練習
     - 読み方についての議論
     - ∀ と ∃ 入れ替えると違ってしまう
5. 参考文献

連絡事項＆本日の内容

- 宿題はほぼ全員提出してもらった。心配したけれど良かった。フィードバックしたので、必ず見て下さい。数学の宿題はマルがもらえるのが普通とは考えないこと。特に数理リテラシーは英会話っぽいところがある。間違えても気にしない。次から直す。
- 宿題２で式を日本語で読むような問題は、答え方の幅が広い。でもこういう読み方をすすめたい、と言うのが強くあって、とにかく正確に真似をしてほしい。それからずれたものは間違いとは言えないけれど。

宿題について　宿題１

- (1) 大体できていた。辞書式順序になってない人が 4,5 人。辞書式順序の場合は、次のどちらか。

T	T	T		F	F	F
T	T	F		F	F	T
T	F	T		F	T	F
T	F	F		F	T	T
F	T	T		T	F	F
F	T	F		T	F	T
F	F	T		T	T	F
F	F	F		T	T	T

- (2), (3) は「真似をしよう」と言った。
(2) 「$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ を示せ。」については、授業中の例で「$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ を示せ。」を解いている。

$$p\vee(q\wedge r) \equiv (q\wedge r)\vee p \equiv (q\vee p)\wedge(r\vee p) \equiv (p\vee q)\wedge(p\vee r) \quad \therefore p\vee(q\wedge r) \equiv (p\vee q)\wedge(p\vee r).$$

$\vee$ を $\wedge$ に、$\wedge$ を $\vee$ に入れ替えると照明になる。

$$p\wedge(q\vee r) \equiv (q\vee r)\wedge p \equiv (q\wedge p)\vee(r\wedge p) \equiv (p\wedge q)\vee(p\wedge r) \quad \therefore p\wedge(q\vee r) \equiv (p\wedge q)\vee(p\wedge r).$$

宿題について　宿題1

(3) で脇道に入った人のフォロー

$$\begin{aligned}\cdots &\equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge s)\\ &\equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)\end{aligned}$$

最後の $\equiv$ が成り立つのはなぜか。それは交換法則だけではない！

1 行目は $(((p \wedge r) \vee (q \wedge r)) \vee (p \wedge s)) \vee (q \wedge s)$
2 行目は $(((p \wedge r) \vee (p \wedge s)) \vee (q \wedge r)) \vee (q \wedge s)$
証明は次のようにできる。

$$\begin{aligned}\cdots &\equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge s)\\ &\equiv (((p \wedge r) \vee (q \wedge r)) \vee (p \wedge s)) \vee (q \wedge s)\\ &\equiv ((p \wedge r) \vee ((q \wedge r) \vee (p \wedge s))) \vee (q \wedge s)\\ &\equiv ((p \wedge r) \vee ((p \wedge s) \vee (q \wedge r))) \vee (q \wedge s)\\ &\equiv (((p \wedge r) \vee (p \wedge s)) \vee (q \wedge r)) \vee (q \wedge s)\\ &\equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)\end{aligned}$$

「$p(x)$ が成り立つような x が (少なくとも 1 つ) 存在する。」

$$\text{ある } x \left\{ \begin{array}{l} \text{が存在して} \\ \text{について} \end{array} \right\} p(x) \left\{ \begin{array}{l} \text{が成り立つ。} \\ \text{が成立する。} \\ \text{である。} \\ . \end{array} \right\}$$

There exists x such that $p(x)$ holds.

これを次のように表す。

$$\exists x \quad p(x)$$

∃ は exists の頭文字の大文字 E の鏡文字である。
∃ x s.t. $p(x)$ と書く人も多い。この辺は気分の問題である。

2.3 ある○○が存在して…, ∃ $(\exists x\colon\ p_1(x))\ p_2(x)$

例 3.1 (方程式の実数解の存在)

方程式 $x^3 - x + 1 = 0$ の実数解 x が存在する。
ある x が存在して、x は実数かつ $x^3 - x + 1 = 0$.
$\exists x\ (x \in \mathbb{R} \land x^3 - x + 1 = 0)$.

この例がそうであるように、多くの場合、$p(x)$ は $p_1(x) \land p_2(x)$ の形をしていて、$p_1(x)$ が考察の範囲などを表している。このとき

$$\exists x \quad (p_1(x) \land p_2(x))$$

を次のように表す。

$$(\exists x : p_1(x)) \quad p_2(x).$$

例 3.1 (続き)

$(\exists x\colon\ x \in \mathbb{R}) \quad x^3 - x + 1 = 0$.
$(\exists x \in \mathbb{R})\ x^3 - x + 1 = 0$.
「ある実数 x が存在して、$x^3 - x + 1 = 0$.」

似た例を追加する。

例 3.2 ($\sqrt{2}$ の存在)

$\exists x \quad (x > 0 \land x^2 = 2).$
$(\exists x\colon\ x > 0) \quad x^2 = 2.$
$(\exists x > 0) \quad x^2 = 2.$
「ある正の数 x が存在して $x^2 = 2.$」

2 つ以上の変数を含む述語 (条件) がある。

例 3.3

$xy = x$ は、x と y に数を代入すると命題になる。
$x = 0,\ y = 0$ を代入すると $0 \cdot 0 = 0$ となり、真な命題である。
$x = 1,\ y = 0$ を代入すると $1 \cdot 0 = 1$ となり、偽な命題である。

2 変数 $x,\ y$ を含む述語は、$p(x, y)$ のように表せる。

2.4.1 2変数の述語で1つの変数に量称記号をつける

2変数 x, y を含む述語 $p(x, y)$ に対して、

$$\forall y \quad p(x,y) \quad と \quad \exists y \quad p(x,y)$$

は、どちらも x についての述語になる。

例 3.4

(1) $$(\forall y \in \mathbb{R}) \quad xy = x$$

(2) $$(\exists y \in \mathbb{R}) \quad xy = x$$

いずれも、x についての述語である。例えば

(1) に $x = 0$ を代入すると	$(\forall y \in \mathbb{R})$	$0 \cdot y = 0$	これは真な命題
(1) に $x = 1$ を代入すると	$(\forall y \in \mathbb{R})$	$1 \cdot y = 1$	これは偽な命題
(2) に $x = 0$ を代入すると	$(\exists y \in \mathbb{R})$	$0 \cdot y = 0$	これは真な命題
(2) に $x = 1$ を代入すると	$(\exists y \in \mathbb{R})$	$1 \cdot y = 1$	これは真な命題

2.4.2 2 つの変数を持つ述語に 2 つの量称記号をつける

$(\forall y \in \mathbb{R})\ xy = x$ も、$(\exists y \in \mathbb{R})\ xy = x$ も、変数 x についての述語であるから、$\forall x$ あるいは $\exists x$ をつけて命題が出来る。

- $\forall x(\forall y\ p(x, y))$ 「任意の x (に対して), 任意の y に対して $p(x, y)$」
- $\exists x(\forall y\ p(x, y))$ 「ある x が存在して、任意の y に対して $p(x, y)$」
- $\forall x(\exists y\ p(x, y))$ 「任意の x (に対して), ある y が存在して $p(x, y)$」
- $\exists x(\forall y\ p(x, y))$ 「ある x (が存在して)、ある y が存在して $p(x, y)$」

青いカッコ ( ) は省略できる。

3 つ以上の変数を持つ述語に対しても同様である。

2.4.3 慣れるための練習 (1)

例 3.5

$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x > y$
「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して $x > y$ が成り立つ。」
これは実は真。どんな x に対しても $y = x - 1$ とすれば…証明の書き方は後述

例 3.6

$(\exists y \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{N})\ x > y$
「ある実数 y が存在して、任意の自然数 x に対して $x > y$ が成り立つ。」
これも実は真。$y = -1$ とすれば…

例 3.7

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad x^2 + y^2 \geq 2xy$$

「任意の実数 x, 任意の実数 y に対して $x^2 + y^2 \geq 2xy$.」
「任意の実数 x, y に対して $x^2 + y^2 \geq 2xy$.」

2.4.3 慣れるための練習 (2)

例 3.8 (3 変数の場合、ピタゴラス数)

3 つでも同様で

$$\exists x \exists y \exists z \quad (x \in \mathbb{N} \land y \in \mathbb{N} \land z \in \mathbb{N} \land x^2 + y^2 = z^2)$$

を次のように書く。

$$(\exists x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})(\exists z \in \mathbb{N}) \quad x^2 + y^2 = z^2$$

「ある自然数 x, y, z が存在して $x^2 + y^2 = z^2$」

この命題は真である。$x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ とすると条件を満たす。

2.4.4 読み方についての議論

$\exists x\ P(x)$ の読み方として、

(a) 「ある x が存在して $P(x)$ が成り立つ。」

(b) 「$P(x)$ が成り立つような x が存在する。」

という 2 つの読み方を紹介した。

(a) よりも (b) の方が日本語としては自然かもしれないが、(a) を使うことを勧める (と言いました)。

その理由を、次のスライドで、2 つの命題

- $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x < y$
- $(\exists y \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{R})\ x < y$

を題材にして説明する。

注 $\exists x\ P(x)$ を英語で読むと、“There exists x such that $P(x)$ holds.” となる。関係代名詞を使って書かれた文は、後ろの節から訳す、という話を思い起こさせる。この辺は日本語と英語の違いに係るところである。

2.4.4 読み方についての議論 (続き)

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x < y.$$

(*) 「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して $x < y$ が成立する。」
どんな実数に対しても、それより大きい実数がある。これは真な命題である。

読み方 (b) を使うことにすると

「任意の実数 x に対して、$x < y$ が成り立つような実数 y が存在する」

となるであろう。これは誤解の危険がある。なぜか？
次の命題と混同されやすいから。

$$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x < y.$$

読み方 (a) を使えば
(**) 「ある実数 y が存在して、任意の実数 x に対して $x < y$ が成立する。」
(どんな実数よりも大きいような (チャンピオンの?) 実数があるという意味。これは偽。)
読み方 (b) を使うことにすると、(**) は

「任意の実数 x に対して $x < y$ が成り立つような実数 y が存在する」

となりそうである。

私の意見

青と水色はとても紛らわしい。読点「、」を見落とさなければ大丈夫 (区別できる) という意見もあるけれど、それは聴いただけでは分からない。

機械的な読み方 (a) を採用して、(*) や (**) のように読むことを勧める。

2.4.5 ∀ と ∃ 入れ替えると違ってしまう

(ここは次回に回すことに)
上に出て来た

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x > y$$

$$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x > y$$

で分かるように、∀ と ∃ の順番が変わると、まったく異なる命題になる。

一方、2 つの連続する ∀ や、2 つの連続する ∃ を変えても、変わらない。例えば

$$(\forall x > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad P(x, n)$$

と

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x > 0) \quad P(x, n)$$

は、述語 $P(x, n)$ が何であっても真偽は一致する。

参考文献