

数理リテラシー 練習問題 (2021年7月14日出題)

\_\_年\_\_組\_\_番 氏名\_\_\_\_\_ (解答は次のページにあります)

問11  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(x) = \cos x$  で定めるとき、以下の問に答えよ。

- (1)  $A \subset [-\pi, \pi]$ ,  $B \subset \mathbb{R}$  に対して、 $f(A)$ ,  $f^{-1}(B)$  の定義を記せ。それぞれ何と呼ばれるか。
- (2)  $f(\{\frac{\pi}{2}\})$ ,  $f(\{0, \pi\})$ ,  $f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ ,  $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$ ,  $f^{-1}(\{2\})$ ,  $f^{-1}([\frac{1}{2}, 2])$  を求めよ ( $f$  を含まない式で表せ)。

## 問 11 解答

(1)  $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ . ( $f(x)$  を  $\cos x$  と書いても良い。)  $f(A)$  を  $A$  の  $f$  による像と呼ぶ。

$f^{-1}(B) = \{x \in [-\pi, \pi] \mid f(x) \in B\}$ . ( $f(x)$  を  $\cos x$  と書いても良い。)  $f^{-1}(B)$  を  $B$  の  $f$  による逆像と呼ぶ。

(2)

$$f\left(\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right) = \left\{f(x) \mid x \in \left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right\} = \left\{f(x) \mid x = \frac{\pi}{2}\right\} = \left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \left\{\cos \frac{\pi}{2}\right\} = \{0\}.$$

$$f(\{0, \pi\}) = \{f(x) \mid x \in \{0, \pi\}\} = \{f(x) \mid x = 0 \vee x = \pi\} = \{f(0), f(\pi)\} = \{\cos 0, \cos \pi\} = \{1, -1\}.$$

$f$  は  $[-\pi/2, 0]$  では単調増加、 $[0, \pi/2]$  では単調減少、 $f(-\pi/2) = 0$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f(\pi/2) = 0$ ,  $f$  は連続なので、値  $y = f(x)$  の範囲は  $0 \leq y \leq 1$ . ゆえに

$$f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left\{f(x) \mid x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 1\} = [0, 1].$$

逆像は、方程式や不等式を解くことになる。

$$f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{x \in [-\pi, \pi] \mid f(x) \in \left\{\frac{1}{2}\right\}\right\} = \left\{x \in [-\pi, \pi] \mid \cos x = \frac{1}{2}\right\} = \left\{\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right\}.$$

$$f^{-1}(\{2\}) = \{x \in [-\pi, \pi] \mid f(x) \in \{2\}\} = \{x \in [-\pi, \pi] \mid \cos x = 2\} = \emptyset.$$

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 2\right]\right) &= \left\{x \in [-\pi, \pi] \mid f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]\right\} = \left\{x \in [-\pi, \pi] \mid \frac{1}{2} \leq \cos x \leq 2\right\} \\ &= \left\{x \in [-\pi, \pi] \mid -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}\right\} = \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]. \end{aligned}$$