

2021 年度 数理リテラシー 期末レポート課題

2021 年 7 月 28 日 (水曜) 12:00 公開, 担当 桂田 祐史
メール katurada あっと meiji ドット ac どっと jp

問題は 2 ページ目以降にある。このページを読み飛ばさずにきちんと読むこと。

- この課題 PDF はなるべく早く保存し、もし可能ならば印刷することを勧める。
- メ切は 7 月 28 日 (水)21:00、Oh-o! Meiji で提出すること。メ切後の提出は認めない。なるべく 30 分以上の時間の余裕を持って提出するよう計画し、もし提出に際して問題が生じたら、メ切 10 分前までに連絡して指示を仰ぐこと。メ切が過ぎるまでは、Oh-o! Meiji のお知らせに注意すること。
- 問題の内容について、提出メ切の時間までは、自分以外の人に質問・相談しないこと。ただし、問題文の意味が分からない場合に、私 (桂田) に質問するのを遠慮する必要はない。14:00 までに届いた質問には 15:00 まで、17:00 までに届いた質問には 18:00 までに回答する。主な質問とそれに対する回答は授業 WWW サイト <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/> で公開する予定。そうした場合は Oh-o! Meiji のお知らせ機能を用いて連絡する。
- 何か問題 (サーバーのダウン, ネットワーク障害, etc.) が発生した場合は、出来るだけ早く (遅くとも提出メ切 30 分前までに) メールで連絡すること。
- 解答は A4 サイズの PDF で提出すること。なるべく 1 つのファイルにすること。そのファイルのサイズが 30MB を超える場合は、(サイズが 30MB 未満になるように) 複数のファイルに分割して提出することを認める。Oh-o! Meiji で追加提出すること。
- 数式が正しく表記される限り、PDF の作成方法は問わない (手書きしたものをスキャン、 $\text{\LaTeX}$ またはワープロソフトを使う、何でも可)。 $\text{\LaTeX}$ やワープロソフトで数式を正しく入力する方法が分からない場合は、無理をせず手書きしたものをスキャンすること。スキャンして提出すると間に合いそうもない場合は、写真データの PDF 化でも構わない (読みにくい場合、後から追加提出してもらう可能性がある)。
- 最初のページの一番上に学年・組・番号 (学生番号ではない 1~2 桁の数)・氏名を記入すること。
- ページ抜け (落丁) を防ぐため、ページ番号をつけ、最初のページに全部で何ページか記すこと。
- 解答の順番は自由。ただし小問 (かっこ付きの番号をつけてあるもの) をバラバラの位置に解答するのは避けて、例えば 1. の場合、(1),(2),(3),(4) の解答を 1 箇所にとまとめて書くこと。
- 問題の配列は、解答に必要なものが授業で説明した順となっているため、後の方に簡単な問題があることもある。まずは全体に目を通し、計画を立てること。
- 講義資料、参考書、ネットの情報など、何を参考にしても構わない。たまたま同じ問題の解答が見つかり、それが理解出来た場合はそれを書いても構わない (当然ながら解答が正しいかどうかは自己責任)。計算結果の確認にコンピューターを使っても良い。
- 記号等は授業で説明したものであれば、(もちろん) 断りなく用いて構わない。授業で説明していない記号を用いる場合は、その定義を記すこと。
- 授業中に説明していない定理を用いるときは、証明してから用いること。特に指示のない限り、授業で証明した定理は証明抜きに用いて良い (授業内容のコピー&ペーストをする必要はない)。
- いわゆる「持ち込み不可」の試験ではないので、定義や宿題などをそのまま写せば良いような問題は避けてあります。そのため、期末試験過去問とは少し傾向が変わって見えるかもしれませんが、**大部分は基本的な問題なので落ち着いて問題文を読めば**どうすれば良いか分かると思います。当たり前ですが、解きやすい問題から解いていって下さい。
- 15:00~16:00 に Zoom で質問を受け付ける (参加方法は木曜 Zoom オフィスアワーと同じ。シラバスの補足の 4/18 追記部分にある。)。

1. 次の各文を記号のみで表せ (p, q は命題、 A, B は集合とする)。

(1) -7 は自然数ではないが、整数である。 $\sqrt{7}$ は有理数ではないが、実数である。(2) 「 p かつ q である」の否定は「 p でないか、または q でない」と同値である。(3) A と B の和集合が空集合であるためには、 A と B が空集合であることが必要十分である。(4) すべての複素数 z に対して、ある複素数 w が存在して $z + w = 0$ が成り立つ。

2.

(1) p, q, r を命題とするとき、 $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ と $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ の真理値表を書け。ただし p, q, r の真理値は辞書式順序にすること。

(2) $p \Rightarrow q$ を $\Rightarrow$ を用いずに同値な表現で表せ。またそのことを用いて、 $p \Rightarrow q$ とその対偶 $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ は同値であることを示せ。

(3) X は $\mathbb{R}$ の部分集合であり、すべての自然数 n に対して、写像 $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられているとする。このとき次の条件の否定を書け。

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(\forall y \in X : |x - y| < \delta)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

3. 次の各命題を日本語で表し (数式の部分は数式のままで良い)、真である場合はそれを証明し、偽である場合はその否定命題を ($\neg$ を使わずに) 論理式で書いて、その否定命題を証明せよ。

$$(1) (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) y > x^2 \quad (2) (\forall x > 0)(\exists y > 0) x = e^y$$

4. 次の各命題の真偽を述べよ。

$$(1) \emptyset \in \{\emptyset\} \quad (2) \{\emptyset\} \subset \{\emptyset\} \quad (3) \{\emptyset\} \in \{\emptyset\} \quad (4) \emptyset = \{\emptyset\} \quad (5) (1, 2) = \{1, 2\} \\ (6) \{1, (2, 3), 4\} = \{4, 1, (2, 3)\} \quad (7) \{1, (2, 3), 4\} = \{1, (3, 2), 4\} \quad (8) \{1, \{2, 3\}, 4\} = \{4, 1, \{3, 2\}\}$$

5. (1) A と B を集合とするとき、次の各集合の定義と呼び方を述べよ。

$$(a) A \cup B \quad (b) A \cap B \quad (c) A \setminus B \quad (d) A^c \quad (e) A \times B \quad (f) 2^A$$

(2) $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{1, 2\}$ とするとき、 $P \times Q$, 2^P を求めよ。

6. 次の (I), (II) のいずれか一方を選択して解答せよ (配点は同じである)。

(I) A, B, C を集合とするとき、次の各命題は一般に成り立つかどうか答えよ。また、成り立つ場合には証明し、そうでない場合には反例をあげよ。

$$(1) A \subset B \cup C \Rightarrow A \subset B \vee A \subset C \quad (2) A \subset B \cap C \Rightarrow A \subset B \wedge A \subset C$$

(II) $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ とする。また、すべての $x \in A$ に対して $g(x) \geq 0$ が成り立つとする。

$$X := \{x \in A \mid f(x) = \sqrt{g(x)}\}, \quad Y := \{x \in A \mid f(x)^2 = g(x)\}$$

とおくとき、以下の (1), (2) に答えよ。

(1) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$, $f(x) = x - 4$, $g(x) = x + 2$ のとき、 X と Y を求めよ。

(2) 正しいものを選び証明せよ。(a) つねに $X = Y$ が成り立つ。(b) $X \subset Y$ はつねに成り立つが、 $X = Y$ が成り立たないこともある。(c) $Y \subset X$ はつねに成り立つが、 $X = Y$ が成り立たないこともある。

(「つねに」とは、任意の A, f, g (ただし $x \in A \Rightarrow g(x) \geq 0$ は仮定する) に対して、という意味。)

7.

- (1) 実数 x が、すべての自然数 n に対して $0 \leq x < \frac{1}{n}$ を満たすならば、実は $x = 0$ であることを、アルキメデスの公理を用いて証明せよ。

アルキメデスの公理: $(\forall a > 0) (\forall b > 0) (\exists n \in \mathbb{N}) na > b$

- (2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{n} < x \leq 2^n\}$ が成り立つとする。 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ と $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ を求めよ。結果だけでなく証明もすること。

8.

- (1) n は自然数、 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq n\}$ とするとき、 A から A への写像の個数、そのうち全射であるものの個数、単射であるものの個数、全単射であるものの個数をそれぞれ求めよ。また $n = 3$ の場合に、 A から A への写像をすべて求めよ。

- (2) 次の $\sim$ を (a についての条件で) 埋めよ。また簡単な説明 (根拠) を書くこと。

$a > 0$ に対して、 $f: [-\pi, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ を $f(x) = \sin(ax)$ で定義する。

f が単射であるためには、 が必要十分である。また f が全射であるためには が必要十分である。ゆえに f が全単射であるためには が必要十分である。

9. $I = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ ($x \in I$) とする。自分の学生番号を下の位から見ていって、最初に見つかる 0 と 1 以外の数を n とする。

自分の学生番号が 261019009⁸ ならば $n = 8$, 26101900³1 ならば $n = 3$, 26101⁹0011 ならば $n = 9$.

- (1) $f(\{n\})$, $f(\{n, -n\})$, $f([-n, n))$, $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{n^2-1}\right\}\right)$, $f^{-1}\left(\left\{\frac{-1}{n^2-1}\right\}\right)$, $f^{-1}\left(\left[-1, \frac{1}{n^2-1}\right]\right)$ を求めよ。

- (2) $A \neq \emptyset$, $A \subset I$, $f^{-1}(f(A)) = A$ を満たす A の例をあげよ。

- (3) $B \subset \mathbb{R}$, $f(f^{-1}(B)) \neq B$ を満たす B の例をあげよ。