数理リテラシー 第 14 回
～ 写像 (6), 宿題解説 ～

桂田 祐史

2021 年 7 月 21 日

目次

本日の内容&連絡事項

- 「期末レポートについて」の説明と注意事項 (ほぼ繰り返し)。
- 前回の授業で、例年 (例えば 2020 年度) に講義している内容の解説は一応終了しましたが、二、三補足します。時間が余って気が向いたら、証明の例題として、「写像による集合の像と逆像」に属する定理を一つ紹介します。
- 宿題の 9, 10 の解説の追加をします。

期末レポートについて (2021/7/21 版)

- 課題の提示は 7 月 28 日 (水曜) 12:00, Oh-o! Meiji のレポート・システムを使って行います。なるべく早くアクセスして PDF を保存しておくことを勧めます。
- 提出〆切は 7 月 28 日 (水曜) 21:00 です。
- 課題文自体は、授業 WWW サイトでも公開します。
- 内容は問題を解いて解答をレポートする、というものです。問題の量は従来の期末試験程度で、120 分程度の時間で解答できるはずです。もちろん提出〆切に間に合う限り、もっと時間をかけても構いません。
- 解答しているときに、講義資料や教科書、ノート、参考書などを見ても構いませんが、問題公開時から提出〆切までの間は、他人と相談することはしないで下さい。事前によく復習しておくことを勧めます。
- A4 サイズの PDF で提出してもらいます。できれば 1 つのファイルにして下さい。ページ番号をつけることを勧めます (抜けていないか、自分でも分かりやすい)。
- Oh-o! Meiji では、1 つのファイルのサイズは 30MB までという制限があります。それを超えた場合、複数のファイルに分割して追加提出で送って下さい。

期末レポートについて (2021/7/21 版)

1. 自分の宿題のファイルのサイズを確認して、3MB を大きく超える人は対策を考えて下さい。写真は大きくなりがちで、スキャン・アプリの利用を推奨します (間に合うことが最優先なので、急ぐときは手段は問いません)。
2. コンピューターで数式が正しく書けない場合は無理をせず、手書きで解答したものをスキャンした PDF を提出して下さい。
3. 何か問題が起こった場合は、出来るだけ早く (遅くとも提出〆切前までに) メールで連絡・相談して下さい (アドレスは、`katurada` あっと `meiji` どぉっと ac ドット jp)。場合によっては、〆切りを延期する可能性があります。メールアドレスは、どこかにメモしておくことを勧めます。
4. 問題の意図が分からない、問題文がおかしいように思える、などの場合は遠慮せずメールで質問して下さい。
   (従来の期末試験では、質問に対して受験者全員に説明するようにしています。それに準ずるものです。)
5. 質問への回答や、締め切りの延期などは、Oh-o! Meiji と授業 WWW サイトで公開し、Oh-o! Meiji のお知らせ機能を使って通知します。
6. なるべく期末試験前のような準備をしておくことを勧めます。課題文公開前は、「課題は何か」以外の質問には極力回答します。

写像は式ではない (第 8 回 (2021/6/9) のやり残し)

写像は式ではない。異なる式で同じ写像が定義されたりする。教科書 [1] の例。

写像は式ではない (第 8 回 (2021/6/9) のやり残し)

写像は式ではない。異なる式で同じ写像が定義されたりする。教科書 [1] の例。
$X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5\}$ のとき、X から Y への写像をすべて求める。

写像は式ではない (第 8 回 (2021/6/9) のやり残し)

写像は式ではない。異なる式で同じ写像が定義されたりする。教科書 [1] の例。
$X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5\}$ のとき、X から Y への写像をすべて求める。
次の $2^3 = 8$ 個の写像 f_j $(j = 1, 2, \cdots, 8)$ がある。

j	$f_j(1)$	$f_j(2)$	$f_j(3)$
1	4	4	4
2	4	4	5
3	4	5	4
4	4	5	5
5	5	4	4
6	5	4	5
7	5	5	4
8	5	5	5

X の各要素 1, 2, 3 が Y のどの要素に対応するか決めれば、写像が定まる。

写像は式ではない (第 8 回 (2021/6/9) のやり残し)

写像は式ではない。異なる式で同じ写像が定義されたりする。教科書 [1] の例。

$X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5\}$ のとき、X から Y への写像をすべて求める。
次の $2^3 = 8$ 個の写像 f_j $(j = 1, 2, \cdots, 8)$ がある。

j	$f_j(1)$	$f_j(2)$	$f_j(3)$
1	4	4	4
2	4	4	5
3	4	5	4
4	4	5	5
5	5	4	4
6	5	4	5
7	5	5	4
8	5	5	5

X の各要素 1, 2, 3 が Y のどの要素に対応するか決めれば、写像が定まる。

$g(x) = \max\{x + 2, 4\}$, $h(x) = \left[\frac{x+7}{2}\right]$ で $g\colon X \to Y$, $h\colon X \to Y$ を定めると

写像は式ではない (第 8 回 (2021/6/9) のやり残し)

写像は式ではない。異なる式で同じ写像が定義されたりする。教科書 [1] の例。

$X=\{1,2,3\}$, $Y=\{4,5\}$ のとき、X から Y への写像をすべて求める。
次の $2^3=8$ 個の写像 f_j $(j=1,2,\cdots,8)$ がある。

j	$f_j(1)$	$f_j(2)$	$f_j(3)$
1	4	4	4
2	4	4	5
3	4	5	4
4	4	5	5
5	5	4	4
6	5	4	5
7	5	5	4
8	5	5	5

X の各要素 1, 2, 3 が Y のどの要素に対応するか決めれば、写像が定まる。

$g(x)=\max\{x+2,4\}$, $h(x)=\left[\frac{x+7}{2}\right]$ で $g\colon X\to Y$, $h\colon X\to Y$ を定めると

$$g(1)=\max\{1+2,4\}=4,\quad g(2)=\max\{2+2,4\}=4,\quad g(3)=\max\{3+2,4\}=5.$$

$$h(1)=\left[\frac{8}{2}\right]=[4]=4,\quad h(2)=\left[\frac{9}{2}\right]=[4.5]=4,\quad h(3)=\left[\frac{10}{2}\right]=[5]=5.$$

写像は式ではない (第 8 回 (2021/6/9) のやり残し)

写像は式ではない。異なる式で同じ写像が定義されたりする。教科書 [1] の例。

$X = \{1,2,3\}$, $Y = \{4,5\}$ のとき、X から Y への写像をすべて求める。
次の $2^3 = 8$ 個の写像 f_j $(j = 1, 2, \cdots, 8)$ がある。

j	$f_j(1)$	$f_j(2)$	$f_j(3)$
1	4	4	4
2	4	4	5
3	4	5	4
4	4	5	5
5	5	4	4
6	5	4	5
7	5	5	4
8	5	5	5

X の各要素 1, 2, 3 が Y のどの要素に対応するか決めれば、写像が定まる。

$g(x) = \max\{x+2, 4\}$, $h(x) = \left[\frac{x+7}{2}\right]$ で $g\colon X \to Y$, $h\colon X \to Y$ を定めると

$$g(1) = \max\{1+2,4\} = 4, \quad g(2) = \max\{2+2,4\} = 4, \quad g(3) = \max\{3+2,4\} = 5.$$

$$h(1) = \left[\frac{8}{2}\right] = [4] = 4, \quad h(2) = \left[\frac{9}{2}\right] = [4.5] = 4, \quad h(3) = \left[\frac{10}{2}\right] = [5] = 5.$$

f_2, g, h はみな等しい: $f_2 = g = h$.
g と h は $g(x)$ と $h(x)$ の式は違うが、$g = h$. f_2 はそもそも $f_2(x)$ を式で与えていない。

「単調増加」と「狭義単調増加」(第 11 回 (2021/6/30) の補足)

$I, J \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to J$ とする。

f が**単調増加**とは、次の条件が満たされることをいう。

$$(\forall x, x' \in I) \quad (x \le x' \Rightarrow f(x) \le f(x')).$$

f が**狭義単調増加**とは、次の条件が満たされることをいう。

$$(\forall x, x' \in I) \quad (x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')).$$

「単調増加」と「狭義単調増加」(第 11 回 (2021/6/30) の補足)

$I, J \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to J$ とする。

f が**単調増加**とは、次の条件が満たされることをいう。

$$(\forall x, x' \in I) \quad (x \le x' \Rightarrow f(x) \le f(x')).$$

f が**狭義単調増加**とは、次の条件が満たされることをいう。

$$(\forall x, x' \in I) \quad (x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')).$$

狭義単調増加ならば単調増加である。

$I, J \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to J$ とする。

f が**単調増加**とは、次の条件が満たされることをいう。

$$(\forall x, x' \in I) \quad (x \le x' \Rightarrow f(x) \le f(x')).$$

f が**狭義単調増加**とは、次の条件が満たされることをいう。

$$(\forall x, x' \in I) \quad (x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')).$$

狭義単調増加ならば単調増加である。しかし、逆は成り立たない。

例えば、$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定まる f (符号関数と呼ばれ, sign で表す) は、単調増加であるが、狭義単調増加ではない。

「単調増加」と「狭義単調増加」(第 11 回 (2021/6/30) の補足)

$I, J \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to J$ とする。

f が**単調増加**とは、次の条件が満たされることをいう。

$$(\forall x, x' \in I) \quad (x \le x' \Rightarrow f(x) \le f(x')).$$

f が**狭義単調増加**とは、次の条件が満たされることをいう。

$$(\forall x, x' \in I) \quad (x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')).$$

狭義単調増加ならば単調増加である。しかし、逆は成り立たない。

例えば、$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定まる f (符号関数と呼ばれ, sign で表す) は、単調増加であるが、狭義単調増加ではない。

多分「こんなのも単調増加というんだ」という感想を持つ人が多いでしょう。

「単調増加」と「狭義単調増加」(第 11 回 (2021/6/30) の補足)

$I, J \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to J$ とする。

f が**単調増加**とは、次の条件が満たされることをいう。

$$(\forall x, x' \in I) \quad (x \le x' \Rightarrow f(x) \le f(x')).$$

f が**狭義単調増加**とは、次の条件が満たされることをいう。

$$(\forall x, x' \in I) \quad (x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')).$$

狭義単調増加ならば単調増加である。しかし、逆は成り立たない。

例えば、$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定まる f (符号関数と呼ばれ, sign で表す) は、単調増加であるが、狭義単調増加ではない。

多分「こんなのも単調増加というんだ」という感想を持つ人が多いでしょう。

こういう f は単射ではない。つまり「単調増加ならば単射」は偽である。「狭義単調増加ならば単射」としっかり区別しよう。

宿題 9 を見て　定義を述べるとき自分で前振りを書こう

(1) 例えば「単射の定義を述べよ」に対して、単に

$$(\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$$

と書いた人が多い。

宿題 9 を見て　定義を述べるとき自分で前振りを書こう

(1) 例えば「単射の定義を述べよ」に対して、単に

$$(\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$$

と書いた人が多い。しかし、問題文のどこにも写像の記号が書いていないので、これはおかしい。

$f\colon X \to Y$ が単射であるとは、$(\forall x \in X)(\forall x' \in X)$
$(x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$ が成り立つことをいう。

これは慣れれば難しくなくできるはず。

宿題9を見て　問題文をよく読もう

(2) は「集合 A から集合 B への写像をすべて求め、写像の総数、単射であるものの個数、全射であるものの個数、全単射であるものの個数をそれぞれ求めよ。」という問であった。

宿題 9 を見て　問題文をよく読もう

(2) は「集合 A から集合 B への写像をすべて求め、写像の総数、単射であるものの個数、全射であるものの個数、全単射であるものの個数をそれぞれ求めよ。」という問であった。

開けてみてびっくり。

宿題9を見て　問題文をよく読もう

(2) は「集合 A から集合 B への写像をすべて求め、写像の総数、単射であるものの個数、全射であるものの個数、全単射であるものの個数をそれぞれ求めよ。」という問であった。

開けてみてびっくり。

- 求めた写像を書かずに個数だけを表にして答えた人
  (普通「求めよ」と書いたら書くものでは?「方程式の解を求めよ」とあったら解を書きますよね?問題文を直そうか、検討したけれど、今後も「求めよ」で通すことに決めた。)

宿題 9 を見て　問題文をよく読もう

(2) は「集合 A から集合 B への写像をすべて求め、写像の総数、単射であるものの個数、全射であるものの個数、全単射であるものの個数をそれぞれ求めよ。」という問であった。

開けてみてびっくり。

- 求めた写像を書かずに個数だけを表にして答えた人
  (普通「求めよ」と書いたら書くものでは?「方程式の解を求めよ」とあったら解を書きますよね?問題文を直そうか、検討したけれど、今後も「求めよ」で通すことに決めた。)
- その反対に写像を求めて表で表したが、個数については一部しか書かない人
  (「それぞれ求めよ」と書いてあるのだけど…)

両方でかなりの割合を占めた。

宿題 9 を見て　問題文をよく読もう

(2) は「集合 A から集合 B への写像をすべて求め、写像の総数、単射であるものの個数、全射であるものの個数、全単射であるものの個数をそれぞれ求めよ。」という問であった。

開けてみてびっくり。

- 求めた写像を書かずに個数だけを表にして答えた人
  (普通「求めよ」と書いたら書くものでは？「方程式の解を求めよ」とあったら解を書きますよね？問題文を直そうか、検討したけれど、今後も「求めよ」で通すことに決めた。)
- その反対に写像を求めて表で表したが、個数については一部しか書かない人
  (「それぞれ求めよ」と書いてあるのだけど…)

両方でかなりの割合を占めた。

(試験や期末レポートでは単純に「○を書いたら□点」とやっているので、上のような答案は点がのびない…)

宿題 9 を見て　グラフを描こう (自分のためだ)

(3) では、各関数が、単射であるか、全射であるか、全単射であるか判定して理由を述べてもらった。

宿題 9 を見て　グラフを描こう (自分のためだ)

(3) では、各関数が、単射であるか、全射であるか、全単射であるか判定して理由を述べてもらった。

グラフを描くことは要求していないのだが、**グラフは描くべき**である。描いていない人が多い (もしかすると計算用紙に書いたのかもしれないが、考察するときの大事な情報なので答案に含めるべきだ)。

宿題 9 を見て　グラフを描こう (自分のためだ)

(3) では、各関数が、単射であるか、全射であるか、全単射であるか判定して理由を述べてもらった。

グラフを描くことは要求していないのだが、**グラフは描くべき**である。描いていない人が多い (もしかすると計算用紙に書いたのかもしれないが、考察するときの大事な情報なので答案に含めるべきだ)。

- (a) の $f(x) = \sin 2x$ のグラフ実際に描かない人が多く、それが X を間違った原因だろうと想像している。
  $X = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ とか、$X = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ が答えになるのだが、
  $X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ と答えた人が多かった。
- (b) の $f(x) = \tan^{-1} x$ を tan と勘違いした人が結構いたようだ (宿題を出すときの授業で説明したのだけど$\cdots$)。
- (c) のグラフは描いたけれど、$x = 0$ でとんがっていたり (C^∞ 級なのでとんがるはずない)、原点を通らなかったり、おかしい人が少なくなかった。

(1 ページにおさめようとして、小さい字で書いたり、グラフを省略しているのかとも感じた。そういうのはよしましょう。)

宿題 9 を見て　全射であるかどうか

全射になる、ならないについては、理由も含めて比較的良く出来ていた。値域 (今回は定義域がみな $\mathbb{R}$ なので値域は $f(\mathbb{R})$ と言う記号で表せる) を書いて ((a) のとき、$f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, (b) のとき $f(\mathbb{R}) = (-\pi/2, \pi/2)$, (c) のとき $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$)、終域 (今回は皆 $\mathbb{R}$) と等しくないことを述べるのが簡単であろう。

関数によっては、値域を具体的に求めるのが難しい場合もあるけれど、この問題の関数はグラフを描けば分かってしまうので、厳密な証明は要求しない。

宿題 9 を見て　単射であるかどうか

単射でないことを示すには、$x \neq x'$ かつ $f(x) = f(x')$ を満たす x, x' の存在を示せばよく、この問題の場合は具体的なすぐ求まるので簡単であった。

宿題 9 を見て　単射であるかどうか

単射でないことを示すには、$x \neq x'$ かつ $f(x) = f(x')$ を満たす x, x' の存在を示せばよく、この問題の場合は具体的なすぐ求まるので簡単であった。

単射であることを示すには、授業で説明したように「狭義単調増加または狭義単調減少ならば単射」という定理を使うのが簡単である。
今回は (b) がそれに該当している。「$f(x) = \tan^{-1} x$ のとき $f'(x) = \frac{1}{x^2+1} > 0$ であるから、f は狭義単調増加である。ゆえに f は単射である。」と証明できる。

宿題 9 を見て　集合の書き方

f の値域や、g の定義域、終域を書く必要があるが、そこでイエローカードを出された人が多い。

$(x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0)$ というのがあったけれど、これは $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$ のつもりだろう。聞き飽きたかもしれないけれど、集合のカッコは $\{\quad\}$ である。

宿題 9 を見て　集合の書き方

f の値域や、g の定義域、終域を書く必要があるが、そこでイエローカードを出された人が多い。

$(x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0)$ というのがあったけれど、これは $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$ のつもりだろう。聞き飽きたかもしれないけれど、集合のカッコは $\{\quad\}$ である。

今回、ちょっと意外だったのは、g の終域 Y を表すのに、

$$(\sharp) \qquad Y = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\} \quad \text{(これはマズイ)}$$

のように書いた人がいたこと。これは

$$(\flat) \qquad Y = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$$

と書くべきである。$(\flat)$ を意味するつもりで $(\sharp)$ と書くことはできない。

f の値域や、g の定義域、終域を書く必要があるが、そこでイエローカードを出された人が多い。

$(x \mid x \in \mathbb{R} \land x \geq 0)$ というのがあったけれど、これは $\{x \mid x \in \mathbb{R} \land x \geq 0\}$ のつもりだろう。聞き飽きたかもしれないけれど、集合のカッコは $\{\quad\}$ である。

今回、ちょっと意外だったのは、g の終域 Y を表すのに、

$$(\sharp) \qquad Y = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\} \quad (\text{これはマズイ})$$

のように書いた人がいたこと。これは

$$(\flat) \qquad Y = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$$

と書くべきである。$(\flat)$ を意味するつもりで $(\sharp)$ と書くことはできない。

$\{f(x) \mid P(x)\}$ という書き方はあって、それにちょっと似ているように感じるかもしれないが、全然違う、と分かってもらいたい。

宿題 10 を見て

(3) f を D から E への写像とみなすとき、f は全単射であることを示せ。

をやってもらうのが狙いでしたが、大きく外してしまったようです。

宿題 10 を見て

(3) f を D から E への写像とみなすとき、f は全単射であることを示せ。

をやってもらうのが狙いでしたが、大きく外してしまったようです。

宿題を出したときの授業で次のことを言いました。

(a) 「写像 f の逆写像が存在するならば f は全単射である」という定理を使うと良い (これは言われれば、分かるでしょう)。
(b) 逆写像 f^{-1} を求めるには、$y=f(x)$ を方程式と考えて、x を求める (y で表す式を求める) と良い。

宿題 10 を見て

(3) f を D から E への写像とみなすとき、f は全単射であることを示せ。

をやってもらうのが狙いでしたが、大きく外してしまったようです。

宿題を出したときの授業で次のことを言いました。

- (a) 「写像 f の逆写像が存在するならば f は全単射である」という定理を使うと良い (これは言われれば、分かるでしょう)。
- (b) 逆写像 f^{-1} を求めるには、$y = f(x)$ を方程式と考えて、x を求める (y で表す式を求める) と良い。

この (b) を具体的にどうやるかわからなかったみたいですね (話したつもりなんだけど)。この問題では、$f(x, y) = (x^2 - y^2, y/x)$ なので、$(u, v) = (x^2 - y^2, y/x)$, つまり

$$u = x^2 - y^2 = 0, \quad v = y/x$$

を x, y についての連立方程式とみなして解く、ということになります。

宿題 10 を見て

上の方程式を解くと ($x > 0$ に注意して)

$$x = \sqrt{\frac{u}{1 - v^2}}, \quad y = v\sqrt{\frac{u}{1 - v^2}}.$$

宿題 10 を見て

上の方程式を解くと ($x > 0$ に注意して)

$$x = \sqrt{\frac{u}{1 - v^2}}, \quad y = v\sqrt{\frac{u}{1 - v^2}}.$$

この後はどうすれば良い？

宿題 10 を見て

上の方程式を解くと ($x > 0$ に注意して)

$$x = \sqrt{\frac{u}{1 - v^2}}, \quad y = v\sqrt{\frac{u}{1 - v^2}}.$$

この後はどうすれば良い？色々やりようがありますが、例えば次の方針 (これは授業では言わなかったけれど、逆写像の定義を見れば分かるんじゃないかな、と思ってました)。

- $f\colon D \to E$ に対して、写像 g が f の逆写像であることを示すには、$g\colon E \to D$ であることと、

$$g \circ f = \mathrm{id}_D \quad \wedge \quad f \circ g = \mathrm{id}_E$$

が成り立つことを示せば良い (逆写像の定義の条件の確認)。

宿題 10 を見て

具体的には、$g(u,v) := \left(\sqrt{\frac{u}{1-v^2}}, v\sqrt{\frac{u}{1-v^2}}\right)$ が次を満たすことを確かめる。

1. (i) 任意の $(u,v) \in E$ に対して $g(u,v) \in D$.
   (これで $g\colon E \to D$ とみなせる。)
2. (ii) 任意の $(x,y) \in D$ に対して $g(f(x,y)) = (x,y)$.
3. (iii) 任意の $(u,v) \in E$ に対して $f(g(u,v)) = (u,v)$.

(本当は、作業をもう少し省略できますが、(i), (ii), (iii) の作業は簡単なので、やってしまうのが簡単です。)

命題 13.1

$f\colon X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$ とするとき、次の (1)–(2) が成り立つ。

1. $f^{-1}(f(A)) \supset A$. f が単射ならば $f^{-1}(f(A)) = A$.
2. $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$. f が全射ならば $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.

証明の前に思い出し。

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad f(x) \in f(A) \quad \text{(前回紹介し忘れた)},$$
$$y \in f(A) \quad \Leftrightarrow$$
$$x \in f^{-1}(B) \quad \Leftrightarrow$$

命題 13.1

$f\colon X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$ とするとき、次の (1)–(2) が成り立つ。

1. $f^{-1}(f(A)) \supset A$. f が単射ならば $f^{-1}(f(A)) = A$.
2. $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$. f が全射ならば $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.

証明の前に思い出し。

$$
\begin{aligned}
x \in A \quad &\Rightarrow \quad f(x) \in f(A) \quad \text{(前回紹介し忘れた)},\\
y \in f(A) \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists x \in A) \quad y = f(x),\\
x \in f^{-1}(B) \quad &\Leftrightarrow x \in X \wedge f(x) \in B.
\end{aligned}
$$

(授業後の追加) ついでに

$$
\begin{aligned}
&f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \mid (\exists x \in A) y = f(x)\},\\
&f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\},\\
&A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B \wedge B \subset A,\\
&A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in A) \quad x \in B.
\end{aligned}
$$

再掲 (1) $f^{-1}(f(A)) \supset A$. f が単射ならば $f^{-1}(f(A)) = A$.

証明.

1. A の任意の要素 x に対して $f(x) \in f(A)$. ゆえに $x \in f^{-1}(f(A))$. ゆえに $A \subset f^{-1}(f(A))$.

再掲 (1) $f^{-1}(f(A)) \supset A$. f が単射ならば $f^{-1}(f(A)) = A$.

証明.

1. A の任意の要素 x に対して $f(x) \in f(A)$. ゆえに $x \in f^{-1}(f(A))$. ゆえに $A \subset f^{-1}(f(A))$.

   以下 f が単射と仮定すると、$f^{-1}(f(A)) \subset A$ であることを示す。
   x を $f^{-1}(f(A))$ の任意の要素とすると、$f(x) \in f(A)$. ゆえに、ある $x' \in A$ が存在して、$f(x) = f(x')$. f が単射だから、$x = x'$. ゆえに $x \in A$.

   ゆえに f が単射であれば、$f^{-1}(f(A)) = A$.

□

再掲 (2) $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$. f が全射ならば $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.

証明.

2. $f\left(f^{-1}(B)\right)$ の任意の要素 y に対して、ある $x \in f^{-1}((B))$ が存在して、$y = f(x)$. $x \in f^{-1}(B)$ であるから、$f(x) \in B$. ゆえに $y \in B$. ゆえに $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.

   以下 f が全射と仮定して、$B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$ を示す。
   B の任意の要素 y に対して、f が全射だから、ある $x \in X$ が存在して、$y = f(x)$. $f(x) \in B$ であるから、$x \in f^{-1}(B)$. これから
   $y = f(x) \in f\left(f^{-1}(B)\right)$.

   ゆえに f が全射ならば $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.

$\square$

参考文献

[1] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).