

数理リテラシー 第13回

～ 写像 (5) ～

桂田 祐史

2021年7月14日

目次

- 1 本日の内容&連絡事項
- 2 期末レポートについて
- 3 写像 (続き)
 - 写像による集合の像と逆像
 - 定義と記号
 - 写像による集合の像と逆像の例
 - 集合の演算との関係
- 4 練習用 問 11
- 5 参考文献

本日の内容&連絡事項

- 「期末レポートについて」の説明と注意事項。
- 本日の講義内容: 写像による集合の像と逆像
(これで平年講義している内容はおしまいです。)
- 宿題 10(問 10) の解説を行います。
(なるべく早く返却するつもりですが…)
- 宿題にはしませんが、練習用の問題 (問 11) を出します。解答もつけておきます。

期末レポートについて

- 課題の提示は 7 月 28 日 (水曜) 12:00, Oh-o! Meiji のレポート・システムを使って行います。なるべく早くアクセスして PDF を保存しておくことを勧めます。
- 提出〆切は 7 月 28 日 (水曜) 21:00 です。
- 課題文自体は、[▶ 授業 WWW サイト](#)でも公開します。
- 内容は問題を解いて解答をレポートする、というものです。問題の量は従来の期末試験程度で、120 分程度の時間で解答できるはずですが、もちろん締め切りに間に合う限り、もっと時間をかけても構いません。
- 解答しているときに、講義資料や教科書、ノート、参考書などを見ても構いませんが、問題公開時から提出〆切までの間は、他人と相談することはしないで下さい。事前によく復習しておくことを勧めます。
- A4 サイズの PDF で提出してもらいます。できれば 1 つのファイルにして下さい。ページ番号をつけることを勧めます (抜けていないか、自分でも分かりやすい)。
- Oh-o! Meiji では、1 つのファイルのサイズは 30MB までという制限があります。それを超えた場合、ファイル・サイズを縮小するか、複数のファイルに分割して追加提出で送って下さい。スキャンして作った PDF の場合、例えば [▶ how_to_pdf](#) で説明した方法が使えるかもしれません (これは圧縮の方法のことです)。
- 自分の宿題のファイルのサイズを確認しておいて下さい。3MB を大きく超える人は対策を考えて下さい。写真は大きくなりがちで、スキャン・アプリを利用することを推奨します。

期末レポート注意事項 (追加)

- ① コンピューターで数式が正しく書けない場合は無理をせず、手書きで解答したものをスキャンしたPDFを提出して下さい。
- ② 何か問題が起こった場合は、出来るだけ早く(遅くとも提出〆切前までに)メールで連絡・相談して下さい(アドレスは、katurada あつと meiji どおつと ac ドット jp)。障害などが起こった場合は、〆切りの延期等をする可能性があります。メールアドレスは、どこかにメモしておくことを勧めます。
- ③ 問題の意図が分からない、問題文がおかしいように思える、などの場合は遠慮せずメールで質問して下さい。
(従来の期末試験では、質問があって回答したときは、受験者全員に説明するようにしています。それに準ずるものです。)
- ④ 質問に対する回答や、締め切りの延期などは、Oh-o! Meiji と授業WWWサイトで公開し、公開したことを Oh-o! Meiji のお知らせ機能を使って通知します。

定義 12.1 (写像による集合の像と逆像)

$f: X \rightarrow Y$ とする。

- ① $A \subset X$ に対して

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \quad (= \{y \mid (\exists x \in A)y = f(x)\})$$

を f による A の (順) 像 (the (direct) image of A under f) と呼ぶ。

特に f による X の像 $f(X)$ (f の値域とも呼ぶことにしてある) のことは、 f の像 (the image of f) と呼び、 $\text{Image}(f)$ と表す。

- ② $B \subset Y$ に対して

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

を f による B の逆像 (the inverse image of B under f) あるいは原像 (preimage) と呼ぶ。

4.8.1 定義と記号

注意 実は順像、逆像を表す記号には色々ある(そうだ)。

	順像の記号	逆像の記号
この講義	$f(A)$	$f^{-1}(B)$
教科書 ([?])	$f_*(A)$	$f^*(B)$
	$f[A]$	$f^{-1}[B]$
	$f^{\rightarrow}(A),$	$f^{\leftarrow}(B)$

注意 f の逆写像 f^{-1} が存在するとき、 $B \subset Y$ に対して、 $f^{-1}(B)$ という記号には、次の2つの解釈がある。

- a) f による B の逆像
- b) f^{-1} による B の像

実はどちらの解釈でも同じ集合を表す。

4.8.2 写像による集合の像と逆像の例

例 12.2

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ とするとき

$$\begin{aligned} f(\{1\}) &= \{f(x) \mid x \in \{1\}\} \\ &= \{f(x) \mid x = 1\} \\ &= \{f(1)\} = \{1\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\{-2\}) &= \{f(x) \mid x \in \{-2\}\} \\ &= \{f(x) \mid x = -2\} \\ &= \{f(-2)\} = \{4\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\{1, -2\}) &= \{f(x) \mid x \in \{1, -2\}\} \\ &= \{f(x) \mid x = 1 \vee x = -2\} \\ &= \{f(1), f(-2)\} = \{1, 4\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f([-2, 1]) &= \{f(x) \mid x \in [-2, 1]\} \\ &= \{f(x) \mid -2 \leq x \leq 1\} \\ &= \{y \mid 0 \leq y \leq 4\}, \end{aligned}$$

$$f(\emptyset) = \{f(x) \mid x \in \emptyset\} = \emptyset.$$

4.8.2 写像による集合の像と逆像の例

例 12.3

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ とするとき

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{3\}) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{3\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 3\} \\ &= \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\{-2\}) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{-2\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = -2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -2\} \\ &= \emptyset, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\{-2, 3\}) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{-2, 3\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = -2 \vee f(x) = 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -2 \vee x^2 = 3\} = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}([-2, 3]) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [-2, 3]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq f(x) \leq 3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x^2 \leq 3\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}\}, \end{aligned}$$

$$f^{-1}(\emptyset) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \emptyset\} = \emptyset.$$

4.8.3 集合の演算との関係

集合の演算 (\cap , \cup , \setminus) と、写像による集合の像・逆像の関係はしばしば必要になる。基本的な定理を紹介する。

証明のために以下のことはすぐ思い出せるようにしておこう。

$f: X \rightarrow Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$ とする。

$$y \in f(A) \Leftrightarrow (\exists x \in A) \quad y = f(x).$$

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in X \quad \wedge \quad f(x) \in B.$$

逆像に関する公式は覚えるのも、証明するのも簡単である。次のスライドで、それから始めよう。

命題 12.4 (写像による集合の逆像)

$f: X \rightarrow Y$ とする。また $B_1, B_2, B \subset Y$ とするとき、次が成り立つ。

- ① $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
- ② $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
- ③ $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
- ④ $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$. 特に $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

証明

- ① $B_1 \subset B_2$ を仮定する。
 $x \in f^{-1}(B_1)$ とすると、 $x \in X \wedge f(x) \in B_1$.
 仮定より $f(x) \in B_2$.
 ゆえに $x \in f^{-1}(B_2)$.
 ゆえに $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

4.8.3 集合の演算との関係 逆像についての公式 (続き)

再掲

$$(2) f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

$$(3) f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

② 任意の $x \in X$ に対して

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \Leftrightarrow ((f(x) \in B_1) \wedge (f(x) \in B_2)) \\ &\Leftrightarrow (x \in f^{-1}(B_1)) \wedge (x \in f^{-1}(B_2)) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

ゆえに $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

③ (2) の証明中の \cap を \cup に置き換えれば (3) の証明になる。

4.8.3 集合の演算との関係 逆像についての公式 (続き)

再掲

$$(4) f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2). \text{ 特に } f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c.$$

④ 任意の $x \in X$ に対して

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \setminus B_2 \\ &\Leftrightarrow (f(x) \in B_1) \wedge (\neg(f(x) \in B_2)) \\ &\Leftrightarrow (x \in f^{-1}(B_1)) \wedge (\neg(x \in f^{-1}(B_2))) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

であるから $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

一般に $f^{-1}(Y) = X$ が成り立つので

$$f^{-1}(B^c) = f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(B) = (f^{-1}(B))^c.$$

命題 12.5

$f: X \rightarrow Y$ とする。また $A_1, A_2, A \subset X$ とするとき、次が成り立つ。

- ① $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.
- ② $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. (等号は一般には成り立たない。)
- ③ $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
- ④ $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$. (等号は一般には成り立たない。)

証明

- ① $A_1 \subset A_2$ を仮定する。 $y \in f(A_1)$ とすると、ある $x \in A_1$ が存在して $y = f(x)$. 仮定より $x \in A_2$ であるから、 $y \in f(A_2)$. ゆえに $f(A_1) \subset f(A_2)$.
- ② $y \in f(A_1 \cap A_2)$ とすると、ある $x \in A_1 \cap A_2$ が存在して $y = f(x)$. $x \in A_1$ かつ $x \in A_2$ が成り立つ。 $x \in A_1$ より $y \in f(A_1)$. また $x \in A_2$ より $y \in f(A_2)$. ゆえに $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. ゆえに $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. ((1) を用いた別証もある。)

4.8.3 集合の演算との関係 順像についての公式 (続き)

再掲 (2) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

(2) の別証明

$A_1 \cap A_2 \subset A_1$ であるから、(1) を用いて、 $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1)$.

同様に $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$.

ゆえに $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. □

再掲 (3) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(3) の証明 ($A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$ を用いる)

Ⓐ $y \in f(A_1 \cup A_2)$ とする。ある $x \in A_1 \cup A_2$ が存在して、 $y = f(x)$ 。
 $x \in A_1$ または $x \in A_2$ が成り立つ。

$x \in A_1$ のときは $y \in f(A_1)$ 。 $x \in A_2$ のときは $y \in f(A_2)$ 。

ゆえに $y \in f(A_1)$ または $y \in f(A_2)$ 。 すなわち $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ 。

ゆえに $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$ 。

Ⓑ $A_1 \subset A_1 \cup A_2$ であるから ((1) を用いて)、 $f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2)$ 。 同様に $f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$ 。 ゆえに $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$ 。

(a), (b) から $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ 。 (証明終)

4.8.3 集合の演算との関係 順像についての公式 (続き)

再掲 (3) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(3) の別証明 ($\exists x P_1(x) \vee P_2(x) \equiv (\exists x P_1(x)) \vee (\exists x P_2(x))$ に気づけば、次のように一気に証明できる。)

$$\begin{aligned}y \in f(A_1 \cup A_2) &\Leftrightarrow \exists x (x \in A_1 \cup A_2 \wedge y = f(x)) \\&\Leftrightarrow \exists x ((x \in A_1 \vee x \in A_2) \wedge y = f(x)) \\&\Leftrightarrow \exists x ((x \in A_1 \wedge y = f(x)) \vee (x \in A_2 \wedge y = f(x))) \\&\Leftrightarrow (\exists x (x \in A_1 \wedge y = f(x))) \vee (\exists x (x \in A_2 \wedge y = f(x))) \\&\Leftrightarrow y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2) \\&\Leftrightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2).\end{aligned}$$

ゆえに $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$. (証明終)

再掲 (4) $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$.

(4) の証明

$y \in f(A_1) \setminus f(A_2)$ とすると、 $y \in f(A_1) \wedge y \notin f(A_2)$.

$y \in f(A_1)$ であることから $(\exists x \in A_1) y = f(x)$.

実は $x \notin A_2$. 実際 $x \in A_2$ とすると $y \in f(A_2)$ となり矛盾が生じる。

ゆえに $x \in A_1 \setminus A_2$ であるから、 $y \in f(A_1 \setminus A_2)$.

練習用 問 11

練習用の問を用意した (もう宿題にはしない)。

以下に置いてあります (解答つき)。

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/toi11.pdf> (PDF)

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/toi11.tex> (T_EX ソース)

参考文献