数理リテラシー 第12回

〜 写像 (4) 〜

桂田 祐史

2021年7月7日

目次

本日の内容&連絡事項

- 本日の講義内容: 単射・全射・全単射 (続き) と逆写像
- 宿題 9 の解説を行います。
- 宿題 10 を出します。締め切りは 7 月 12 日 (月曜)13:30 です。それ以降 7 月 14 日 15:20 までに提出されたものは 1/2 にカウントします。

先週の復習: 定義を思い出す

$f\colon X \to Y$ とする。

f が単射であるとは

$$(\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad \bigl(x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')\bigr)$$

が成り立つことである。この条件は

$$(\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad \bigl(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\bigr)$$

と同値である (二つの矢が刺さる的はない)。

f が全射であるとは

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X) \quad y = f(x)$$

が成り立つことである (どの的にも矢が刺さる)。

4.6.3 単射, 全射, 全単射の合成

次の定理は基本的である。時間がないときは、(6) 以降は後回しで良い。

定理 12.1 (単射, 全射, 全単射の合成)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ とする。

1. f と g が単射ならば、$g \circ f$ は単射である。
2. f と g が全射ならば、$g \circ f$ は全射である。
3. f と g が全単射ならば、$g \circ f$ は全単射である。
4. $g \circ f$ が単射ならば、f は単射である。
5. $g \circ f$ が全射ならば、g は全射である。

---

6. $g \circ f$ が単射でも、g は単射とは限らない。
7. $g \circ f$ が全射でも、f が全射とは限らない。
8. $g \circ f$ が単射かつ f が全射ならば、g は単射である。
9. $g \circ f$ が全射かつ g が単射ならば、f は全射である。

4.6.3 単射, 全射, 全単射の合成　証明 パート 1

まず (1), (2) を図に描いて説明する。それから文章で説明する。

1. 　f と g が単射と仮定する。x, x' を X の任意の要素とする。
$x \neq x'$ と仮定すると f が単射であるから $f(x) \neq f(x')$.
　g が単射であるから $g\left(f(x)\right) \neq g\left(f(x')\right)$.
　すなわち $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$. ゆえに $g \circ f$ は単射である。
2. 　f と g が全射と仮定する。
　任意の $z \in Z$ に対して、g が全射であることから、$g(y) = z$ を満たす $y \in Y$ が存在する。
　f が全射であることから、$f(x) = y$ を満たす $x \in X$ が存在する。
このとき、
$$g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(y\right) = z.$$
　ゆえに $g \circ f$ は全射である。
3. f と g が全単射と仮定する。$g \circ f$ は (1) から単射、(2) から全射であるので、全単射である。

4.6.3 単射, 全射, 全単射の合成　証明 パート 2

4. $g \circ f$ が単射と仮定する。x, x' を X の任意の要素とする。
$f(x) = f(x')$ と仮定すると、
$g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(f(x')\right) = g \circ f(x')$ であるから
$g \circ f(x) = g \circ f(x')$. $g \circ f$ が単射であるから、$x = x'$. ゆえに f は単射である。

5. $g \circ f$ が全射と仮定する。任意の $z \in Z$ に対して、ある $x \in X$ が存在して、$z = g \circ f(x)$ が成り立つ。このとき、$y := f(x)$ とおくと、$y \in Y$ であり、

$$g(y) = g\left(f(x)\right) = g \circ f(x) = z.$$

ゆえに g は全射である。

4.6.3 単射, 全射, 全単射の合成　証明 パート 3 (おまけ)

6. $X = \{1\}$, $Y = \{-1, 1\}$, $Z = \{1\}$, $f(1) = 1$, $g(1) = 1$, $g(-1) = 1$ として、$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を定めると、$g \circ f\colon X \to Z$, $g \circ f(1) = 1$ である。$g \circ f$ は単射であるが、g は単射でない。
7. (6) と同じ写像が反例となる。$g \circ f$ は全射であるが、f は全射でない。

(ここは授業ではカットするかも。教科書 (中島 [?]) にはもっと書いてあるけれど…)

8. $g \circ f$ が単射かつ f は全射と仮定する。$y, y' \in Y$ が $y \neq y'$ を満たすとする。f が全射であるから、$f(x) = y$ かつ $f(x') = y'$ を満たす $x, x' \in X$ が存在する。$y \neq y'$ であるから、$x \neq x'$ である。$g \circ f$ が単射であるから、$g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$. これから

$$g(y) = g\left(f(x)\right) = g \circ f(x) \neq g \circ f(x') = g\left(f(x')\right) = g(y').$$

ゆえに g は単射である。

9. $g \circ f$ が全射かつ g は単射と仮定する。任意の $y \in Y$ に対して、$z = g(y)$ とおくと、$z \in Z$ である。$g \circ f$ が全射であるから、$g \circ f(x) = z$ を満たす $x \in X$ が存在する。このとき、$g\left(f(x)\right) = z = g\left(y\right)$ であるが、g が単射であるから、$f(x) = y$. ゆえに f は全射である。 □

4.7 逆写像　定義

逆関数の概念は、写像にも拡張される。まずは定義をしよう。

定義 12.2 (逆写像)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ とする。g が f の**逆写像** (the inverse mapping of f) であるとは

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \land f \circ g = \mathrm{id}_Y \tag{1}$$

を満たすことをいう。

逆写像は無条件では存在しない。f の逆写像が存在するためには、f が全単射であることが必要十分である (後で証明する)。

4.7 逆写像　後のために逆関数の例を思い出して予告

X, Y を共に $[0,\infty)$ として、$f\colon X\to Y$ を $f(x)=x^2$ $(x\in X)$ で定義する。

f は全射である。すなわち、任意の $y\in Y=[0,\infty)$ に対して、$f(x)=y$ を満たす $x\in X=[0,\infty)$ が存在する (証明 (i) ($\sqrt{\ }$ を知っている場合) $x:=\sqrt{y}$ とおくと $x\in X$ かつ $f(x)=x^2=\left(\sqrt{y}\right)^2=y$. あるいは (ii) ($\sqrt{\ }$ を知らない場合) $f(0)=0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ と中間値の定理を用いる。)。

また f は単射である。実際、$f'(x)=2x>0$ $(x>0)$ であるから、f は $X=[0,\infty)$ 全体で狭義単調増加であり、f は単射である。

ゆえに、任意の $y\in Y$ に対して、$f(x)=y$ を満たす $x\in X$ はただ一つ存在する (もちろん $x=\sqrt{y}$ である)。その x を $g(y)$ として、関数 $g\colon Y\to X$ が定まる。これを f の**逆関数**と呼ぶのであった。

この定義から、任意の $y\in Y$ に対して、$x:=g(y)$ とおくと、$f(x)=y$. ゆえに $f(g(y))=f(x)=y$. したがって $f\circ g=\mathrm{id}_Y$.

一方、任意の $x\in X$ に対して $y:=f(x)$ とおくと、やはり g の定義から $g(y)=x$. ゆえに $g(f(x))=g(y)=x$. ゆえに $g\circ f=\mathrm{id}_X$.

4.7 逆写像　後のために逆関数の例を思い出して予告

以上の議論は

- $f(x) = e^x$ と $g(y) = \log y$
- $f(x) = \tan x$ $(x \in (-\pi/2, \pi/2))$ と $g(y) = \tan^{-1} y$

について、ほとんど同様に成り立つ。

この議論はさらに一般化できる、という話を以下で見る。

4.7 逆写像　逆行列の話と比べてみよう

これからする話は、線形代数で聞いた話とよく似ている、と思うかもしれない。それで先回りして説明しておく。

n 次実正方行列 A に対して、写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が $f(x) = Ax$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ で定義できる。このとき、次のことが成り立つ。

- A の逆行列は存在するならば 1 つしかない。(それを A^{-1} で表す。)
- f が全単射 $\Leftrightarrow$ A の逆行列が存在する。
- A の逆行列が存在するならば $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- A, B がともに逆行列を持つならば $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

以上のことは、まだ教わっていないかもしれなけれど、そのうちに教わるはず。この話と同じようなことが逆写像についても成り立つ。

以下 3 枚のスライドで一気に証明する。

命題 12.3 (逆写像の一意性)

$f \colon X \to Y$ の逆写像は存在すれば 1 つしかない。

証明　$g, g' \colon Y \to X$ が

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \land f \circ g = \mathrm{id}_Y, \quad g' \circ f = \mathrm{id}_X \land f \circ g' = \mathrm{id}_Y$$

を満たすとする。これらのことと、結合法則から

$$g' = g' \circ \mathrm{id}_Y = g' \circ (f \circ g) = (g' \circ f) \circ g = \mathrm{id}_X \circ g = g.$$

ゆえに $g' = g$. □

定義 12.4 (逆写像の記号)

$f \colon X \to Y$ の逆写像が存在するとき、f^{-1} で表す。

$f \colon X \to Y$ の逆写像が存在するとき、$f^{-1} \colon Y \to X$ であり

(2)
$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X \land f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y.$$

命題 12.5 (逆写像が存在 ⇔ 全単射)

1. $f\colon X \to Y$ の逆写像が存在するならば、f は全単射である。
2. $f\colon X \to Y$ が全単射ならば f の逆写像が存在する。

証明　(1)　一般に恒等写像は全単射であることを思い出す。
$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ は全射だから、f は全射である。$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ は単射だから、f は単射である。
(2)　f は全射だから、任意の $y \in Y$ に対して、ある $x \in X$ が存在して $y = f(x)$. このような $x \in X$ はただ 1 つしかない。実際 $x, x' \in X$ かつ $y = f(x)$ かつ $y = f(x')$ とすると、$f(x) = f(x')$ であり、f が単射であるから $x = x'$.
　$g\colon Y \to X$ を $g(y) = x$ (x は $x \in X \wedge f(x) = y$ を満たす) で定めると、$g = f^{-1}$. 実際

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \wedge \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

が成り立つ。その証明は 3 枚前の前のスライド「後のために逆関数の例を思い出して予告」の議論と同じである。 □

命題 12.6 (逆写像の逆写像は元の写像, 合成写像の逆写像)

1. $f\colon X \to Y$ の逆写像 f^{-1} が存在するとき、$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
2. $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ の逆写像がともに存在するならば、$f^{-1} \circ g^{-1}$ は $g \circ f$ の逆写像である: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

証明 (1) $g := f^{-1}$ とおくと、$g\colon Y \to X$ かつ

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \wedge f \circ g = \mathrm{id}_Y.$$

ゆえに f は g の逆写像である。ゆえに $f = g^{-1} = \left(f^{-1}\right)^{-1}$.

(2) 逆写像の定義の条件を確かめる。

$$\begin{aligned}\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ (g \circ f) &= \left(\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ g\right) \circ f = \left(f^{-1} \circ \left(g^{-1} \circ g\right)\right) \circ f \\ &= \left(f^{-1} \circ \mathrm{id}_Y\right) \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) &= \left((g \circ f) \circ f^{-1}\right) \circ g^{-1} = \left(g \circ \left(f \circ f^{-1}\right)\right) \circ g^{-1} \\ &= (g \circ \mathrm{id}_Y) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_Z.\end{aligned}$$

ゆえに $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. □

4.7 逆写像　$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

次の関係はしばしば用いる。

命題 12.7

$f\colon X \to Y$ の逆写像 f^{-1} が存在するとき、任意の $x \in X$, 任意の $y \in Y$ に対して

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

証明

($\Rightarrow$) $y = f(x)$ ならば

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1} \circ f(x) = \mathrm{id}_X(x) = x.$$

($\Leftarrow$) $x = f^{-1}(y)$ ならば

$$f(x) = f\left(f^{-1}(y)\right) = f \circ f^{-1}(y) = \mathrm{id}_Y(y) = y. \quad \square$$

Cf.　行列とベクトルの話では、$y = Ax \Leftrightarrow x = A^{-1}y$.

参考文献